

Matematika IPA dan Aplikasinya dalam **STEM**

(Science, Technology, Engineering, and Mathematics)

Rooselyna Ekawati

Madlazim

M Budiyanto

Nur Ducha

Amaria

MATEMATIKA IPA DAN APLIKASINYA DALAM STEM

Penulis

Roselyna Ekawati, Madlazim
M Budiyanto, Nur Ducha, Amaria

Editor

Dr. Anas Ahmadi, M.Pd.

Desain Sampul & Lay out

Alek Subairi

Penerbit

Graniti

Anggota IKAPI (181/JTI/2017)

Perum. Kota Baru Driyorejo, Jln. Granit Kumala 1/12, Gresik 61177

website: www.penerbitgraniti.com

fb: Penerbit Graniti

ig: [@penerbit_graniti](https://www.instagram.com/penerbit_graniti)

email: penerbitgraniti@gmail.com

telp. 0813 5782 7429 / 0813 5782 7430

Hak cipta dilindungi undang-undang

All rights reserved

Cetakan pertama, November 2020

ISBN: 978-602-5811-86-9

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak isi buku ini dengan bentuk dan
dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

Isi buku di luar tanggung jawab penerbit dan percetakan

Kata Pengantar

Puji syukur Alhamdulillah, penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang berkat rahmat- dan karunia-Nya, penyusunan Buku Matematika IPA dan Aplikasinya dalam STEM akhirnya ini dapat diselesaikan. Penulisan buku ini disesuaikan dengan kebutuhan masyarakat, guru, mahasiswa untuk mengetahui aplikasi Matematika IPA dalam STEM.

Buku ini bertujuan agar dapat membantu memudahkan pemahaman pembaca yang tentang Pendidikan dan pembelajaran STEM beserta penyesuaiannya pada abad 21. Terdapat 5 prinsip utama untuk praktik pembelajaran dalam STEM terintegrasi adalah integrasi konten STEM, pembelajaran yang berpusat pada masalah, pembelajaran berbasis penyelidikan, pembelajaran berbasis desain dan pembelajaran kooperatif. Kelima prinsip ini berakar pada pandangan konstruktivis sosial tentang pembelajaran. Integrasi konten STEM (*integration of STEM content*), mengacu pada asimilasi eksplisit tujuan pembelajaran, konten, dan praktik dari berbagai disiplin STEM. Adapun materi pada buku Matematika IPA ini diantaranya penerapan konsep materi Matrik, vector, diferensial, integral, dan persamaan

diferensial biasa untuk mencari solusi dan pemecahan masalah pada fenomena IPA.

Penulis menyadari bahwa modul ini masih jauh dari sempurna, namun demikian penulis berharap semoga modul ini dapat memberikan manfaat dan kontribusi bagi pembaca. Kritik dan saran penulis harapkan dari para pembaca untuk perbaikan materi dan isi buku pedoman.

Surabaya, 09 Nopember 2020

Penulis

Daftar Isi

KATA PENGANTAR	iii
<u>DAFTAR ISI</u>	v
PENDIDIKAN BERBASIS STEM	1
<u>MATRIKS DAN APLIKASINYA</u>	7
<u>VEKTOR DAN APLIKASINYA</u>	68
<u>FUNGSI DAN APLIKASINYA</u>	98
<u>DIFERENSIAL DAN APLIKASINYA</u>	115
<u>INTEGRAL DAN APLIKASINYA</u>	133
<u>PERSAMAAN DIFFERENSIAL</u>	
<u>BIASA DAN APLIKASINYA</u>	151
DAFTAR PUSTAKA.....	180

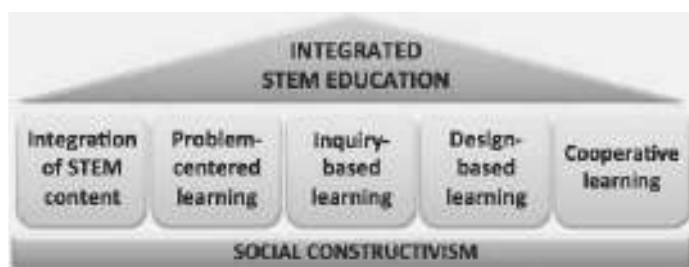
Pendidikan Berbasis STEM

Beberapa sumber mendeskripsikan pengertian STEM yang berbeda. Menurut Brown, dkk (2011), STEM adalah meta-disiplin di tingkat sekolah dimana guru sains, teknologi, teknik dan matematika mengajar pendekatan terpadu dan masing-masing materi disiplin tidak dibagi-bagi tapi ditangani dan diperlukan sebagai satu kesatuan yang dinamis. Selain itu, Kelley, dkk (2016) menyatakan pendidikan STEM terpadu sebagai pendekatan untuk mengajar dua atau lebih bidang STEM dengan melibatkan praktek STEM dalam menghubungkan masing-masing bidang STEM agar dapat meningkatkan pembelajaran siswa. Pendidikan STEM dapat membentuk SDM yang memiliki kemampuan bernalar dan

berpikir kritis, logis, dan sistematis, sehingga mereka nantinya mampu menghadapi tantangan global serta mampu meningkatkan perekonomian negara. Penerapan STEM di Indonesia saat ini masih minim karena tidak didukung oleh kebijakan pemerintah secara maksimal. Hal ini dapat terlihat dari tidak adanya tuntutan kurikulum saat ini yang secara tegas bahwa lembaga pendidikan wajib menerapkan STEM. Oleh karena itu, perangkat pembelajaran seperti modul yang berbasis STEM yang dikembangkan untuk pendidikan di Indonesia jumlahnya masih sedikit dan bersifat parsial. Beberapa peneliti telah mengembangkan perangkat seperti Pertiwi, R.S (2017) telah mengembangkan LKS dengan pendekatan STEM untuk melatih keterampilan berpikir kreatif siswa pada materi fluida statis. Muharomah, D.R (2017) telah mengembangkan LKPD untuk pembelajaran STEM untuk meningkatkan hasil belajar konsep evolusi.

Beberapa hasil penelitian menunjukkan bahwa pembelajaran berbasis STEM dapat melatih kemampuan dan kecakapan siswa menghadapi masalah abad 21. Sehingga, pendekatan STEM merupakan pendekatan pembelajaran yang dapat menumbuhkan keterampilan abad 21.

Pendekatan pembelajaran berbasis STEM memiliki karakteristik proses saintifik dan Engineering practices. Secara umum karakteristik tersebut dapat diimplementasikan dalam pembelajaran. Thibaut, dkk (2018) menggambarkan kerangka teoritis untuk praktik pembelajaran dalam STEM terintegrasi pada gambar 1.



Gambar 1. Kerangka teoritis untuk praktik pembelajaran dalam STEM terintegrasi

1. Terdapat 5 prinsip utama untuk praktik pembelajaran dalam STEM terintegrasi adalah integrasi konten STEM, pembelajaran yang berpusat pada masalah, pembelajaran berbasis penyelidikan, pembelajaran berbasis desain dan pembelajaran kooperatif. Kelima prinsip ini berakar pada pandangan konstruktivis sosial tentang pembelajaran. Integrasi konten STEM (*integration of STEM content*), mengacu pada asimilasi

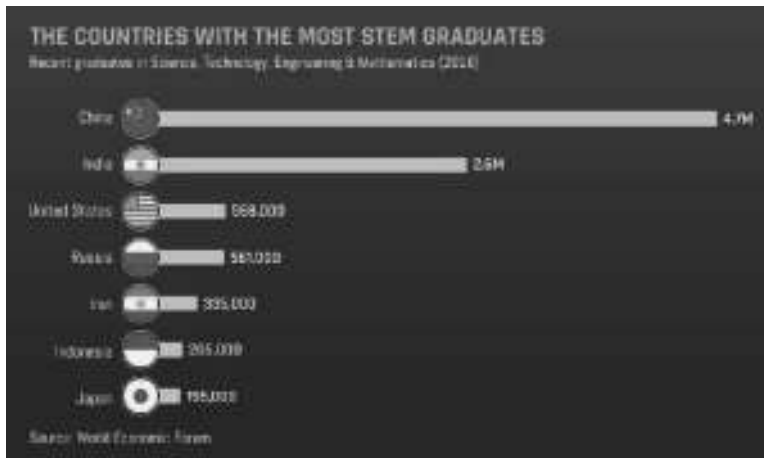
eksplisit tujuan pembelajaran, konten, dan praktik dari berbagai disiplin STEM. Karena kurangnya konsensus tentang terminologi, tidak ada strategi khusus yang diusulkan (misalnya, pembelajaran multidisipliner, interdisipliner atau terpadu).

2. Pembelajaran yang berpusat pada masalah (*problem-centered learning*), dimaksudkan bahwa lingkungan belajar harus melibatkan siswa dalam masalah-masalah dunia nyata yang otentik, terbuka, tidak terstruktur, dan terstruktur untuk meningkatkan kebermaknaan konten yang akan dipelajari.
3. Pembelajaran berbasis inkuiri (*inquiry-based learning*), mengacu pada lingkungan belajar yang melibatkan siswa dalam pertanyaan, pembelajaran pengalaman dan aktivitas langsung yang memungkinkan mereka untuk menemukan konsep-konsep baru dan mengembangkan pemahaman baru.
4. Pembelajaran berbasis desain (*design-based learning*), yang memerlukan penggunaan tantangan desain terbuka dan langsung yang memberi siswa kesempatan untuk tidak hanya belajar tentang proses desain teknik

dan praktik rekayasa, tetapi juga memperdalam pemahaman mereka tentang ide-ide inti disiplin.

5. Prinsip pembelajaran kooperatif (*cooperative learning*), menunjukkan bahwa siswa harus mendapatkan kesempatan untuk berkomunikasi dan berkolaborasi satu sama lain untuk memperdalam pengetahuan mereka. Semua prinsip kunci didukung oleh pandangan konstruktivis sosial tentang pembelajaran, yang menentukan bahwa pengetahuan secara aktif dibangun oleh siswa dan bahwa pembelajaran adalah berbagi, bukan sekedar pengalaman individu. Pengintegrasian pendidikan *STEM* dalam pengajaran dan pembelajaran boleh dijalankan pada semua tingkatan pendidikan, mulai dari sekolah dasar sampai universitas.

Keberhasilan pendidikan dengan menerapkan pendekatan *STEM* dapat mempengaruhi kemampuan peserta didik baik dalam dunia pendidikan maupun dunia kerja. Pendekatan *STEM* dalam pembelajaran, telah mulai diterapkan di Indonesia meski dalam skala kecil, hal ini sesuai dengan data Forum Ekonomi Dunia (2016) seperti pada gambar berikut.



Berdasarkan data Forum Ekonomi Dunia, diketahui bahwa China menjadi Negara yang paling berhasil dalam menerapkan pendekatan STEM dalam pembelajaran. Hal ini dapat terjadi karena adanya dukungan dari beberapa pihak yang terkait dalam dunia pendidikannya. Keberhasilan China dalam menerapkan STEM dapat memberikan dampak-dampak positif tidak hanya dengan kemajuan pendidikannya, tapi juga keberhasilan para peserta didik di dunia kerjanya. Berdasarkan data tersebut, diketahui bahwa posisi Indonesia dikatakan masih sangat jauh dibandingkan dengan China. Meskipun pendekatan-pendekatan pembelajaran yang digunakan di Indonesia saat ini terdapat dalam karakteristik pendekatan STEM.

Matriks dan Aplikasinya

A. Definisi dan notasi matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan (unsur) yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang disusun tersebut disebut elemen-elemen atau komponen-komponen matriks. Nama sebuah matriks dinyatakan dengan huruf kapital. Banyak baris $\times$ banyak kolom dari suatu matriks disebut **ordo** matriks atau **ukuran** matriks. Dalam menyatakan matriks, yang pertama disebut adalah banyaknya “**baris**” dan yang kedua adalah banyaknya “**kolom**”.

Perhatikan contoh matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \cdots \rightarrow \text{baris 2}$$

↓
Kolom 1

↓
Kolom 2

↓
Kolom 3

Matriks A terdiri dari 3 baris dan 3 kolom. Matriks A berordo 3×3 atau ditulis $A(3 \times 3)$

Secara umum matriks dapat ditulis:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{b1} & a_{b2} & & a_{bk} \end{bmatrix} = A(b \times k)$$

Dan dalam hal ini A_{bk} disebut elemen matriks pada baris ke- b kolom ke- k .

Contoh soal 1: Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & -3 & 8 \\ 2 & -5 & 9 & 12 & -4 \\ 3 & 0 & 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

Tentukan :

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a. banyak baris | d. elemen-elemen kolom ke-3 |
| b. banyak kolom | e. $a_{3,4}$ |
| c. elemen-elemen baris ke-1 | f. $a_{1,3}$ |

Jawab :

- banyak baris : **3** buah
- banyak kolom : **5** buah
- elemen-elemen baris ke-1 : **1, 4, 6, -3,**

- d. elemen-elemen kolom ke-3 : **6, 9, 7**
- e. $a_{3,4}$ = elemen baris ke-3 kolom ke-4 = **5**
- f. $a_{1,3}$ = elemen baris ke-1 kolom ke-3 = **6**

1. Orde matriks

Orde matrik yaitu banyaknya baris dan kolom yang menyatakan suatu matriks. $A_{m \times n}$ artinya matriks A berordo m x n yaitu banyaknya baris m buah dan banyaknya kolom n buah.

Contoh: Diketahui $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$.

Tentukan ordo matriks P dan Q

Jawab : Ordo matriks $P = 2 \times 4$; Ordo matriks $Q = 3 \times 2$

2. Jenis-jenis Matriks

a. Matriks Nol

Yaitu matriks yang setiap elemennya nol.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. Matriks Baris

Yaitu matriks yang hanya mempunyai satu baris

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Kolom

Yaitu matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

$$\text{Contoh : } P = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d. Matriks berelemen tunggal

Matriks berelemen tunggal adalah matriks yang mempunyai satu baris dan satu kolom saja. Sebuah bilangan atau sebuah variabel dapat di pandang sebagai matriks berorde 1x1 atau matriks berelemen tunggal.

$$\text{Contoh : } [a], [2 - 3i], [0]$$

B. Aljabar Matriks

1. Kesamaan Matriks

Dua matriks dikatakan sama jika ordo dan elemen-elemen yang seletak sama.

Diketahui dua matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

Jika $A = B$ maka: $a = p, b = q, c = r$ dan $d = s$.

Contoh:

Tentukan x dan y dari $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 2y & -5 \end{bmatrix}$

Jawab: $x = 1$

$$2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

2. Penjumlahan Matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama.

Yang dijumlahkan yaitu elemen-elemen yang seletak.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}$$

Contoh :

Diketahui dua matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+(-2) & 4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1. $A + B = B + A$ (bersifat komutatif)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (bersifat asosiatif)
3. $A + O = O + A = A$ (O matriks identitas dari penjumlahan)
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$ ($-A$ matriks invers penjumlahan)

3. Pengurangan Matriks

Dua matriks dapat dikurangkan jika ordonya sama.

Yang dikurangkan elemen-elemen yang seletak.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix},$$

maka tentukan :

- a. $A - B$ b. $B - A$

Jawab:

$$\text{a. } A - B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } B - A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Pengurangan matriks :

1. $A - B \neq B - A$ (tidak komutatif)
2. $A - (B - C) = (A - B) - C$ (asosiatif)

4. Perkalian Matriks

a. Perkalian matriks dengan bilangan real (skalar)

Mengalikan sebuah matriks dengan sebuah bilangan (yaitu scalar) berarti mengalikan masing-masing elemennya dengan bilangan tersebut. Jadi secara umum dapat di tulis :

$$k \times [a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ maka tentukan :

a. $2A$

b. $-\frac{1}{2}A$

Jawab: a. $2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$

b. $-\frac{1}{2}A = \frac{-1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$

b. Perkalian dua buah matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan satu terhadap yang lain, jika dan hanya jika banyaknya kolom pada matriks yang ke-1 sama dengan banyaknya baris pada matriks ke-2.

Jika: $A = [a_{ij}]_{p \times q}$ dan $B = [b_{ij}]_{q \times r}$

maka: $AB = C = [c_{ij}]_{p \times r}$

dengan: $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

Contoh:

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, C = [7 \quad 9] \text{ dan } D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tentukan :

a. AB

b. AC

c. AD

Jawab:

$$\text{a. } AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+12 \\ 5+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 29 \end{bmatrix}$$

b. AC tidak dapat dikalikan, karena banyaknya kolom matriks A tidak sama dengan banyaknya baris matriks C .

$$\text{c. } D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+14 & 18+16 \\ 5+28 & 6+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 34 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat perkalian matriks :

1. Umumnya tidak komutatif ($AB \neq BA$)
2. Asosiatif : $(AB)C = A(BC)$
3. Distributif kiri : $A(B + C) = AB + AC$
Distributif kanan : $(B + C)A = BA + CA$
4. Identitas : $IA = AI = A$
5. $k(AB) = (kA)B$

C. Komutator dan Anti Komutator

Selisih antara dua matriks AB dan BA disebut komutator dari A dan B , yang didefinisikan sebagai berikut :

$$[A, B] = AB - BA \text{ dan } [B, A] = -[A, B]$$

Secara khusus jika $AB = BA$ atau $[A, B] = 0$, maka dikatakan kedua matriks A dan B saling komut satu sama lain.

Contoh :

Tunjukkan bahwa matriks A dan B berikut tidak komut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -8 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -8 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 18 & -37 \\ -22 & 12 & 8 \\ 78 & 1 & 7-57 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -8 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & -9 \\ 31 & 14 & -48 \\ 12 & -58 & 33 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$[A, B] = AB - BA = \begin{bmatrix} 104 & 18 & -37 \\ -22 & 12 & 8 \\ 78 & 1 & 7-57 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 24 & -9 \\ 31 & 14 & -48 \\ 12 & -58 & 33 \end{bmatrix}$$

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 92 & -6 & -46 \\ -53 & -2 & 56 \\ 66 & 97 & -90 \end{bmatrix} \neq 0$$

Dengan demikian A dan B tidak komut.

Anti Komutator adalah penjumlahan AB dan matriks BA disebut anti komutator dari A dan B yang dinotasikan sebagai berikut :

$$\{A, B\} = AB + BA \text{ jelas bahwa } \{B, A\} = \{A, B\}$$

Contoh :

$$C = \begin{bmatrix} 13 & -2 & -5 \\ -2 & 10 & -2 \\ -5 & -2 & 13 \end{bmatrix} \text{ dan } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$CD = \begin{bmatrix} -12 & 6 & 24 \\ 6 & 6 & 6 \\ 24 & 6 & -12 \end{bmatrix} \text{ dan } DC = \begin{bmatrix} -12 & 6 & 24 \\ 6 & 6 & 6 \\ 24 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

adi

$$\{C, D\} = CD + DC = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 48 \\ 12 & 12 & 12 \\ 48 & 12 & -34 \end{bmatrix}$$

D. Jenis-Jenis Matriks

➤ Berdasarkan ordonya, matriks dibedakan menjadi:

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar / persegi merupakan matriks berordo $n \times n$ atau jumlah baris dan kolomnya sama.

Contoh : $B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

2. Matriks Baris

Matriks baris merupakan matriks yang berordo $1 \times n$ atau hanya memiliki 1 baris.

Contoh : $B_{1 \times 3} = (1 \ 4 \ 3)$

3. Matriks Kolom

Matriks kolom merupakan matriks yang berordo $n \times 1$ atau hanya memiliki 1 kolom.

Contoh : $B_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. Matriks Tegak

Matriks tegak merupakan matriks yang berordo $m \times n$, dimana $m > n$.

Contoh : $B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

5. Matriks Datar

Matriks datar merupakan matriks yang berordo $m \times n$, dimana $m < n$.

Contoh : $B_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

- Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya, matriks dibedakan menjadi :

1. Matriks Nol

Matriks nol merupakan matriks yang semua elemen penyusunnya adalah nol. Matriks nol dapat dinotasikan O .

Contoh : $O_{1 \times 3} = (0 \ 0 \ 0)$

$$O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks persegi yang semua elemen di atas dan di bawah diagonalnya nol. Matriks ini dapat dinotasikan D .

$$\text{Contoh : } D_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Matriks Skalar

Matriks skalar merupakan matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal sama.

$$\text{Contoh : } B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Matriks Simetri

Matriks simetri merupakan matriks persegi yang semua elemennya selain diagonal adalah simetri terhadap diagonal.

$$\text{Contoh: } B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Simetri Miring

Matriks simetri miring merupakan matriks simetri yang semua elemennya selain diagonal saling berlawanan.

$$\text{Contoh: } B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Matriks Identitas

Matriks identitas / satuan merupakan matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya 1 dan selain diagonal bernilai 0. Matriks ini dinotasikan sebagai I .

$$\text{Contoh: } I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas merupakan matriks yang semua elemen dibawah diagonal utamanya adalah 0.

$$\text{Contoh: } B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah merupakan matriks yang semua elemen di atas diagonal utamanya adalah 0.

$$\text{Contoh: } B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Matriks Transpose

Matriks transpose merupakan matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom, atau sebaliknya.

$$\text{Contoh: } B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E. Matriks dan Persamaan Linear

➤ Metode Eliminasi Gauss

Misal terdapat 3 buah persamaan linear berbentuk seperti :

$$x - 2z = 6$$

$$3x + 2y + z = 12$$

$$6x - 2y = 6$$

Maka, persamaan tersebut dapat dituliskan dalam

bentuk perkalian sebagai berikut. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Untuk memecahkan persamaan linear tersebut bisa menggunakan metode Gauss (reduksi). Persamaan linear yang telah dituliskan dalam bentuk matriks tersebut dapat diperoleh *matriks yang diperluas* (*augmented matrix*) sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 12 \\ 6 & -2 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

Untuk mereduksi matriks yang diperluas menjadi matriks eselon dapat ditempuh dengan langkah-langkah berikut :

- a) Mempertukarkan elemen dua buah baris
- b) Mengalikan elemen dalam sebuah baris dengan factor yang tidak nol
- c) Menambahkan atau mengurangi kelipatan salah satu elemen baris dengan (atau dari) elemen dari baris lain.

Proses pengolahan matriks ini dikenal sebagai *reduksi baris* atau *eliminai gauss*. Langkah-langkah pengolahannya bebas sekehendak kita, asalkan ditujukan pada pembentukan matriks eselon.

Contoh Soal :

Diketahui persamaan linear :

$$2x - z = 2$$

$$6x + 5y + 3z = 7$$

$$2x - y = 4$$

Tentukan x, y, z pada persamaan linear tersebut dengan menggunakan metode Gauss

Penyelesaian :

Persamaan linear tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Kurangi baris kedua dengan 3 kali baris pertama, dan baris ketiga dengan 1 kali baris pertama. Langkah ini menghasilkan :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Sekarang tukarkan baris kedua dengan baris ketiga.

Matriksnya menjadi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right)$$

Selanjutnya baris ketiga ditambah dengan 5 kali baris kedua. Matriksnya menjadi :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array} \right)$$

Dengan langkah ini matriks telah direduksi menjadi matriks eselon. Akhirnya kita letakkan kolom sebelah kanan kembali ke posisi semula.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Dengan “substitusi mundur” dimulai dari baris yang paling bawah, kita peroleh :

$$11z = 11 \rightarrow z = 1$$

$$-y + z = 2 \rightarrow y = -1$$

$$2x - z = 2 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Jadi, persamaan linear di atas menghasilkan :

$$x = \frac{3}{2}, y = -1, z = 1$$

F. Determinan Matriks Bujur Sangkar

Setiap matriks persegi memiliki bilangan tersebut yang disebut determinan. Determinan matriks merupakan jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dapat dinotasikan dengan $\det(A)$. (Howard Anton , 1991: hal 67).

Yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian

elementer pada suatu kolom dengan +1 atau -1. Sebelum membahas penentuan besarnya determinan ini terlebih dahulu menelaah kedua besaran berikut.

1. Determinan Minor

Determinan minor merupakan determinan yang elemen-elemennya adalah elemen yang tidak terpotong oleh garis horizontal dan vertical dari determinan yang telah diketahui. Determinan minor dari a_{ij} pada determinan A adalah determinan yang diperoleh dengan menghilangkan baris i dan j pada determinan A tersebut.

Contoh:

Sebuah determinan orde ketiga mempunyai 3 baris dan 3 kolom yaitu:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Masing-masing elemen dalam determinan ini berkaitan dengan minor-minornya yang diperoleh dengan menghilangkan baris dan kolom yang memuat elemen tersebut.

Misal, minor dari a adalah :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

Minor dari :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

Minor dari :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Minor dari elemen yang lain dapat dicari dengan cara yang sama dengan minor a , b , dan c .

Menghitung determinan orde

Untuk menghitung orde ketiga, kita tuliskan elemen-elemen dari baris atas, kemudian masing-masing dikalikan dengan minornya dan diberi tanda bergantian pada suku-sukunya.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Selanjutnya kita terapkan bagaimana menghitung determinan orde kedua,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a[ei - fh] - b[di - fg] + c[dh - eg]$$

Karena nilai determinan orde ketiga ini merupakan jumlah perkalian setiap elemen diagonal utama dan seajarnya dikurangi dengan jumlah perkalian elemen diagonal samping dan seajarnya, maka cara ini dikenal dengan perkalian diagonal.

Contoh Soal :

1. Hitunglah determinan berikut

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\{(3)(5) - (4)(1)\} - 5\{(7)(5) - (4)(2)\} + \\ &\quad 2\{(7)(1) - (3)(2)\} \\ &= -122 \end{aligned}$$

2. Jika $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, hitunglah $\det A$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \det A &= -2\{(4)(-3) - (-2)(6)\} - 3\{(3)(-3) - (-2)(5)\} \\ &\quad + 4\{(3)(6) - (4)(5)\} \\ \det A &= -11 \end{aligned}$$

2. Kofaktor (C)

Kofaktor merupakan hasil perkalian antar (-1) pangkat baris + kolom dikalikan matriks minor.

Contoh :

Misal, minor dari a (M_a) adalah :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

Minor dari (M_b) :

$$\begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{b} & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

Minor dari (M_c) :

$$\begin{vmatrix} a & b & \overline{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$C_a = (-1)^{1+1} M_a$$

$$= 1 \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$C_b = (-1)^{1+2} M_b$$

$$= -1 \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$C_c = (-1)^{1+3} M_c$$

$$= 1 \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

G. Kaidah Cramer

Pada pelajaran disekolah sudah sering mencari solusi dari 2 persamaan dan 2 bilangan tak diketahui atau dari 3 persamaan dan 3 bilangan tak diketahui. Misal kita punya persamaan $x_1 + 2x_2 = 6$ dan $-3x_1 + 4x_2 = 4$. Biasanya kita menggunakan **Metode Eliminasi** atau **Metode Substitusi**. Tapi saya akan mencoba dengan cara yang sedikit berbeda yaitu dengan memanfaatkan **Determinan Matriks**, metode ini dinamakann **Aturan Cramer**. Metode ini untuk menyelesaikan persamaan seperti diatas atau lebih umum mencari solusi dari n persamaan dan n bilangan tak diketahui. Rumus yang akan digunakan pada **Aturan Cramer** ini dijamin pada teorema dibawah ini.

Teorema :

Jika $AX = B$ adalah sistem yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui sehingga $\det(A) \neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang uniq. Pemecahan ini adalah

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

dimana A_j adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri dalam matriks.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini. Carilah solusi dari persamaan dibawah ini menggunakan aturan cramer.

Contoh :

1. Tentukan penyelesaian persamaan linier berikut :

$$2x+3y = 14$$

$$3x-2y = -5$$

Penyelesaian :

Pertama-tama kita tulis dulu kuncinya :

$$X = \frac{D_1}{D_0}, Y = \frac{D_2}{D_0}$$

Jika kita hitung D_0, D_1, D_2 , maka didapat :

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-4) - (9) = -13$$

Tentukan D_1 dan D_2 dengan cara yang sama :

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = (-28) - (-15) = -13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = (-10) - (42) = -52$$

Sehingga

$$X = \frac{D1}{D0} = \frac{-13}{-13}, Y = \frac{D2}{D0} = \frac{-52}{-13}$$

2. Tentukan nilai x_1, x_2, x_3 dari persamaan linier berikut !

$$x_1 + 2x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

Ubah terlebih dahulu kedalam bentuk matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena bilangan takdiketahui atau solusinya ada 3, berarti kita bentuk matriks A_1, A_2 dan A_3 . Dengan matriks A_1 dibentuk dari matriks A dengan mengganti entri-entri kolom pertama pada matriks A dengan nilai-nilai pada sebelah kanan sama dengan (=) di persamaan diatas

yaitu $\begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$. Kemudian untuk membentuk matriks A_2 , kita

mengganti entri-entri kolom kedua matriks A dengan

$\begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$, begitu juga untuk membentuk matriks A_3 yaitu

mengganti entri-entri pada kolom ketiga. Sehingga diperoleh A_1, A_2 dan A_3 seperti berikut ini.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung determinan pada matriks A , A_1 , A_2 dan A_3 dapat menggunakan **Menghitung Determinan Menggunakan Kofaktor.**

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1[4(3) - 6(-2)] - 0[-3(3) - 6(-1)] + 2[-3(-2) - 4(-1)] \\ &= 24 - 0 - 20 \\ &= 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= 6 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 30 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 30 & 4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= 6[4(3)-6(-2)] - 0[30(3)-6(8)] + 2[30(-2)-4(8)]$$

$$= 144 - 0 - 184$$

$$= -40$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 30 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 30 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1[30(3)-6(8)] - 6[-3(3)-6(-1)] + 2[-3(8)-30(-1)]$$

$$= 42 + 18 + 12$$

$$= 72$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 4 & 30 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -3 & 30 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1[4(8)-30(-2)] - 0[-3(8)-30(-1)] + 6[-3(-2)-4(-1)]$$

$$= 92 - 0 + 60 = 152$$

Berdasarkan **Teorema** diatas, maka diperoleh :

$$x_1 = \frac{\text{Det } A_1}{\text{Det } A} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\text{Det } A_2}{\text{Det } A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{\text{Det } A_3}{\text{Det } A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

H. Matriks Singular

Matriks kuadrat $A = [a_{ij}]$ dikatakan singular jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom adalah nol atau jika semua kofaktor dari elemen suatu baris atau kolom sama dengan nol. Untuk melihat kesingularan suatu matriks adalah dengan menghitung determinan matriks tersebut. Apabila determinannya sama dengan nol sebut adalah matriks singular. Jika $\det(A) \neq 0$ maka disebut matriks yang nonsingular. Matriks nonsingular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Contoh :

Periksa apakah matriks berikut singular !

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Mula-mula kita menghitung determinan dari B sebagai berikut :

$$\text{Det B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ternyata $\det B = 0$, jadi B merupakan matriks singular.

I. Adjoint Matriks

Adjoin matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan $\text{adj A} = (k_{ij})^T$. Cara untuk memperoleh adjoint dari suatu matriks bujur sangkar adalah mengganti setiap elemennya dengan kofaktornya dan kemudian ditranspose. Misalnya :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Dari sini kita dapat membuat matriks baru C yang elemennya merupakan kofaktor dari matriks B

$$C = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan B_{ij} adalah kofaktor b_{ij}

dan kemudian untuk mencari adjoint dari B, langkah selanjutnya adalah mentranspose matriks C, jadi

Adjoint matriks $B = C^T$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh :

Diketahui sebuah matriks, yaitu $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Tentukan adjoint matriks tersebut !

$$k_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11; \quad k_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 32;$$

$$k_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -47; \quad k_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$k_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -19; \quad k_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8;$$

$$k_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -18; \quad k_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11;$$

$$k_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 18$$

$$C = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 32 & -47 \\ 2 & -19 & 8 \\ -18 & -11 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } Q = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 32 & -19 & -11 \\ -47 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

J. Invers Matriks

Invers matriks adalah lawan atau kebalikan suatu matriks dalam perkalian yang dilambangkan dengan A^{-1} .

Definisi:

Jika matriks A dan B sedemikian sehingga $A \times B = B \times A = I$, dimana I matriks identitas maka B disebut invers dari A dan A invers dari B. Sehingga berlaku: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$. Dimana I adalah matrik identitas.

1. Invers Matriks Ordo 2×2

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh :

$$\text{Tentukan invers dari matriks } D = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 3(11) - (-7)(-6) = 33 - 42 = -9$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -11/9 & -6/9 \\ -7/9 & -3/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/9 & -2/3 \\ -7/9 & -1/3 \end{bmatrix}$$

2. Invers Matriks Ordo 3×3

Langkah-langkah untuk mencari invers matriks M yang berordo 3×3 adalah :

- Cari determinan dari M
- Transpose matriks M
- Cari adjoin matriks
- Gunakan rumus

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\text{adjoin}(M))$$

Contoh 1:

Tentukan invers dari matriks berikut ini

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Menentukan determinan matriks M :

$$\det(M) = 1(0 - 24) - 2(0 - 20) + 3(0 - 5) = 1$$

- Transpose matriks M .

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Menentukan matriks kofaktor dengan menghitung minor-minor matriksnya.

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -24 & -18 & 5 \\ -20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjoin matriks M :

$$\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Invers matriks M , yaitu:

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh 2:

Diketahui $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan B^{-1} !

$$\text{Det}(B) = |B| = k_{31} \cdot b_{31} + k_{32} \cdot b_{32} + k_{33} \cdot b_{33}$$

$$= (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot 0 + (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot 0 + (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 6$$

$$= 0 + 0 + 24 = 24$$

Adj B =

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat

1. $(A^t)^t = A$

2. $(A + B)^t = A^t + B^t$

3. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

4. $(A^{-1})^t = A$

5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

6. $A \cdot B = C \Rightarrow |A| \cdot |B| = |C|$

Contoh soal.

1. Selesaikan persamaan linier berikut :

$$2x + y - 5z = -11$$

$$x - y - 3z = 6$$

$$4x + 2y - 3z = -8$$

2. Periksa apakah matriks berikut singular ?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan adjoint dari matriks berikut :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan nilai x dan y dengan metode invers matriks :

$$2x + 3y = -1$$

$$5x + 4y = 8$$

Jawaban.

1. Pertama-tama kita tulis dulu kuncinya,

$$X = \frac{D_1}{D_0}, Y = \frac{D_2}{D_0}, Z = \frac{D_3}{D_0}$$

kemudian kita cari masing-masing D_0, D_1, D_2, D_3 seperti berikut :

$$D_0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_0 = 2(3-2) - 1(-3-4) - 5(2+4) = -21$$

Sekarang dengan cara yang sama D_0, D_1, D_2, D_3 dapat dicari sebagai berikut :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 & -5 \\ 6 & -1 & 1 \\ -8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = -11(3-2) - 1(-18+8) - 5(12-8) = -21$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -11 & -5 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} - (-11) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = 2(-18+18) + 11(-3-4) - 5(-8-24) = 63$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -11 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} + (-11) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = 2(8-12) - 1(-8-24) - 11(2+4) = -42$$

Sehingga diperoleh :

$$D_0 = -21, D_1 = -21, D_2 = 63, D_3 = -42$$

Dengan demikian :

$$X = \frac{D_1}{D_0} = \frac{-21}{-21} = 1, Y = \frac{D_2}{D_0} = \frac{63}{-21} = -3, Z = \frac{D_3}{D_0} = \frac{-42}{-21} = 2$$

Jadi, $x = 1, y = -3, z = 2$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Det } A &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(6-1) - 4(12-7) + 1(4-14) \\ &= 10 - 20 + (-10) = -20 \end{aligned}$$

Jadi, matriks A bukan matriks singular.

$$3. B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks B ini, didapat kofaktornya yaitu :

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = +6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +15$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = +20, \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = +13, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = +8, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$\text{Sehingga matriks kofaktor B adalah} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan transpose dari B adalah} = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi adjoint matriks B adalah} = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$4. A \cdot x = B \quad x = \frac{B}{A} \quad x = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adjoint A}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\det A = ad - bc = 8 - 15 = -7$$

$$\text{Adjoint A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adjoint } A \\
 &= \frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{4}{-7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{4}{-7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi, $x = 4$ dan $y = 3$.

3. Perkalian Matriks Bujur Sangkar dengan Inversnya

Contoh:

Diketahui suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Sehingga inversnya adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Bila A dikalikan dengan A^{-1}

$$\begin{aligned}
 Ax A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I
 \end{aligned}$$

Jadi apabila AxA^{-1} hasilnya adalah matriks identitas, $AxA^{-1} = I$

Jika dilakukan perkalian antara A^{-1} dengan A

$$A^{-1}xA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Jadi $A^{-1}xA$ hasilnya adalah matriks identitas, $A^{-1}xA = I$,

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $AxA^{-1} = A^{-1}xA$

K. Matriks Ortogonal

Suatu matriks yang memenuhi hubungan $A^T = A^{-1}$, disebut matriks ortogonal. Jika ruas kiri dan ruas kanan dikalikan dengan matriks A , maka:

$$AA^T = AA^{-1}$$

$$AA^{-1} = I, \text{ dengan demikian } AA^T = I.$$

Contoh:

Tunjukkan bahwa matriks,

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ merupakan matriks ortogonal}$$

- Matriks traspose dari A adalah

$$A^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -\sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Dan

$$A \times A^T =$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{6} & 1\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -\sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A \times A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{2}{6} + 0 & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{6} + 0 & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0 & \frac{1}{3} - \frac{2}{6} - 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{2}{6} + 0 & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

- Karena $A \times A^T = I$, maka A merupakan matriks ortogonal

L. Pemecahan Sistem Persamaan Linier Dengan Metode Matriks dan Invers Matriks

Tinjau suatu sistem persamaan linier:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Sistem persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

yaitu $AX = b$ (persamaan matriks) dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \text{ dan } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jika kedua ruas persamaan matriks tersebut kita kalikan dengan invers matriks A, diperoleh :

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$

Tetapi $A^{-1}AX = I$, jadi $IX = A^{-1}b$.

Dan karena $IX=X$, maka didapat

$$X = A^{-1}b$$

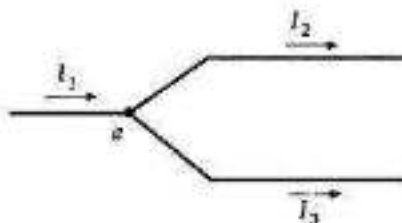
M. Penerapan Matriks dalam Sains, Teknologi, dan Engineering

Salah satu penerapan matriks pada sains adalah saat menyelesaikan masalah rangkaian arus listrik. Pada rangkaian listrik, berlaku hukum Kirchoff yang terdiri dari dua bagian,

yaitu hukum I Kirchoff dan hukum II Kirchoff. Hukum Kirchoff merupakan hukum yang menjelaskan rangkaian listrik sederhana ketika arus listrik mengalir. Berikut penjelasan mengenai hukum I Kirchoff dan hukum II Kirchoff.

Hukum I Kirchoff

Hukum I Kirchoff dapat disebut sebagai Hukum Arus Kirchoff yang berlaku pada rangkaian listrik yang bercabang. Hukum I Kirchoff berbunyi: “Jumlah arus listrik yang masuk pada titik simpul (percabangan) sama dengan jumlah arus yang keluar”. Berikut ilustrasi bunyi hukum I Kirchoff.

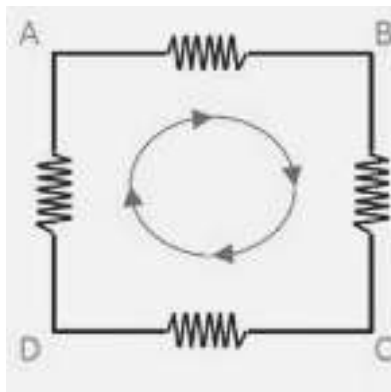


Berdasarkan ilustrasi tersebut, diketahui bahwa I_1 sebagai arus masuk, I_2 dan I_3 sebagai arus keluar yang mana besar keluar arus yang masuk melalui titik cabang a akan sama dengan total arus yang melalui I_2 dan I_3 , secara matematis dapat ditulis dengan $I_1 = I_2 + I_3$. Sehingga, secara umum hukum I Kirchoff dapat dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$\Sigma I_{masuk} = \Sigma I_{keluar}$$

Hukum II Kirchoff

Hukum II Kirchoff dapat disebut sebagai Hukum Tegangan Kirchoff yang berlaku pada rangkaian listrik yang tidak bercabang. Hukum II Kirchoff berbunyi: “Total beda potensial (tegangan) pada suatu rangkaian tertutup adalah 0”. Berikut ilustrasi bunyi hukum II Kirchoff.



Berdasarkan bunyi hukum II Kirchoff, maka total tegangan pada rangkaian di atas adalah $V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{da} = 0$. Secara matematis, hukum II Kirchoff dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\Sigma \varepsilon + \Sigma IR = 0$$

Keterangan:

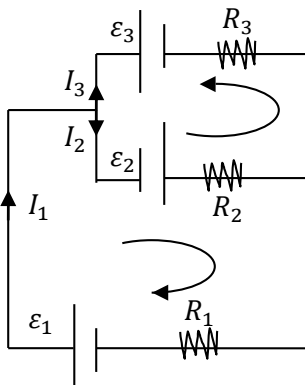
ε = gaya gerak listrik

I = kuat arus listrik

R = hambatan listrik

Dengan menggunakan kedua hukum Kirchoff tersebut dan konsep matriks, maka kita dapat dengan mudah menyelesaikan permasalahan rangkaian listrik.

Contoh:



Tentukan kuat arus yang melewati setiap cabang rangkaian listrik di samping !

$$R_1 = 1 \, \Omega$$

$$\varepsilon_1 = 1 \, V$$

$$R_2 = 2 \, \Omega$$

$$\varepsilon_2 = 2 \, V$$

$$R_3 = 3 \, \Omega$$

$$\varepsilon_3 = 3 \, V$$

Jawab :

Berdasarkan hukum I Kirchoff, diperoleh

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Berdasarkan hukum II Kirchoff, diperoleh

LOOP 1

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_2 R_2 - I_3 R_3$$

$$2 + 3 = 2I_2 - 3I_3$$

$$5 = 2I_2 - 3I_3 \text{ (2)}$$

LOOP 2

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

$$1 + 2 = I_1 + 2I_2$$

$$3 = I_1 + 2I_2 \text{ (3)}$$

Persamaan (1), (2), dan (3) dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk matriks seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai I_1 , I_2 , dan I_3 , yaitu dengan mencari determinan matriks

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(6) + 1(3) - 1(-2) = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1(9) - 1(4) = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(9) - 0 - 1(-5) = 14$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-4) + 1(-5) + 0 = -9$$

Sehingga diperoleh,

$$I_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{5}{11} A$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{14}{11} A$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D_0} = -\frac{9}{11} A$$

Selain penerapan dalam sains, matriks juga dapat diterapkan dalam teknologi dan engineering, salah satunya pada kriptografi. Kriptografi adalah ilmu untuk mengubah naskah asli suatu pesan menjadi naskah acak menggunakan kunci enkripsi agar sulit dibaca oleh orang lain. Aplikasi matriks dalam kriptografi terbagi menjadi dua tahap, yaitu tahap mengirim pesan dan tahap menerima pesan. Pada tahap mengirim pesan, pengirim harus:

- menuliskan isi pesan dan aturan konversi,
- menuliskan pesan dalam bentuk konversi,
- menuliskan pesan dalam bentuk matriks,
- menentukan matriks kunci, sehingga didapat pesan akhir hasil acak yang akan dikirim.
-

Contoh:

Seseorang akan mengirim pesan yang berisi “BE SELF FOREVER”, maka pengirim harus melalui langkah-langkah berikut:

- Menentukan isi pesan: BE SELF FOREVER.
- Menentukan aturan konversi, misal:

A,	B,	C, ..., Z,	,	.	..	?	!
↑↓	↑↓	↑↓	↑↓				↑↓
1,	2,	3, ..., 26,	27,	28,	29,	30,	31

- Menuliskan pesan berdasarkan aturan konversi, maka pesan menjadi:

2 5 27 19 5 12 6 27 6 15 18 5 22 5 18 29

- Menuliskan pesan dalam matriks, misal matriks M

$$M_{2 \times 8} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 27 & 19 & 5 & 12 & 6 & 27 \\ 6 & 15 & 18 & 5 & 22 & 5 & 18 & 29 \end{bmatrix}$$

- Menentukan matriks kunci, misal matriks A berukuran 2×2 .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Menuliskan matriks konversi, misal: $P=AM$, sehingga

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 27 & 19 & 5 & 12 & 6 & 27 \\ 6 & 15 & 18 & 5 & 22 & 5 & 18 & 29 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+18 & 10+45 & 54+54 & 38+15 & 10+66 & 24+15 & 12+54 & 54+87 \\ 2+12 & 5+30 & 27+36 & 19+10 & 5+44 & 12+10 & 6+36 & 27+58 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 55 & 108 & 53 & 76 & 39 & 66 & 141 \\ 14 & 35 & 63 & 29 & 49 & 22 & 42 & 85 \end{bmatrix}$$

- Berdasarkan matriks tersebut, diperoleh pesan yang akan dikirim, yaitu
22 55 108 53 76 39 66 141 14 35 63 29 49 22 42 85
- Kemudian, perangkat pesan yang dikirim ke penerima adalah pesan akhir hasil acak, aturan konversi, dan matriks kunci.

Selanjutnya, sebagai penerima pesan, untuk dapat membaca pesan, maka penerima pesan harus menulis pesan dalam bentuk matriks, kemudian untuk menentukan matriks hasil konversi awal, penerima dapat menggunakan konsep perkalian matriks dan invers matriks. Setelah itu, menggunakan aturan konversi untuk mengubah pesan ke pesan awal.

Contoh:

Berdasarkan perangkat pesan yang diterima pada contoh sebelumnya, penerima pesan menuliskan pesan yang diterima dalam bentuk matriks, misal matriks P, yaitu

$$P = \begin{bmatrix} 22 & 55 & 108 & 53 & 76 & 39 & 66 & 141 \\ 14 & 35 & 63 & 29 & 49 & 22 & 42 & 85 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks kunci pada contoh sebelumnya, yaitu matriks A, diperoleh invers matriks A sebagai berikut.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga, penerima pesan dapat mencari matriks M, diperoleh.

$$\begin{aligned} M &= A^{-1}P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 & 55 & 108 & 53 & 76 & 39 & 66 & 141 \\ 14 & 35 & 63 & 29 & 49 & 22 & 42 & 85 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 44-42 & 110-105 & 216-189 & 106-87 & 152-147 & 78-66 & 132-126 & 282-255 \\ -22+28 & -55+70 & -108+126 & -53+58 & -76+98 & -39+44 & -66+84 & -141+170 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 27 & 19 & 5 & 12 & 6 & 27 \\ 6 & 15 & 18 & 5 & 22 & 5 & 18 & 29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan matriks M, dapat dituliskan pesan dalam bentuk deret bilangan, yaitu

2 5 27 19 5 12 6 27 6 15 18 5 22 18 29

Berdasarkan aturan konversi, maka deret bilangan di atas dapat diubah ke pesan awal, yaitu “BE SELF FOREVER”.

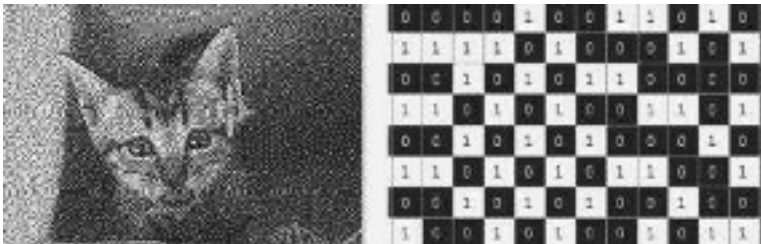
Aplikasi matriks lainnya pada bidang teknologi adalah pada pengolahan gambar. Sebuah gambar dapat didefinisikan sebagai fungsi dua dimensi $f(x, y)$ dimana x dan y adalah koordinat bidang dan $f(x, y)$ merupakan intensitas cahaya gambar pada sebuah titik (x, y) . Sementara itu, gambar digital (*digital image*) merupakan sebuah gambar yang telah melalui proses *sampling & quantizing*. Pada awalnya, sebuah gambar bersifat kontinu. Dengan melakukan proses *sampling & quantizing*, gambar ini diubah menjadi bersifat diskrit. Proses *sampling* adalah proses untuk mengubah koordinat gambar menjadi bersifat diskrit. Hal ini dilakukan dengan membagi gambar menjadi petak-petak satuan yang disebut dengan piksel (*pixel*). Sementara itu, proses *quantizing* adalah proses pemberian nilai intensitas pada tiap-tiap piksel. Setelah melalui kedua proses ini, gambar digital dapat dipandang sebagai sebuah matriks berukuran $m \times n$, dimana m adalah ukuran panjang gambar dan n adalah ukuran lebar gambar dan elemen di dalam

matriks merupakan intensitas warna pada setiap piksel di dalam gambar.

Terdapat beberapa alternatif representasi gambar menggunakan matriks.

a. Binary Image

Gambar disimpan dalam bentuk matriks yang elemen-elemennya berisi 0 dan 1. *Binary image* hanya dapat menampilkan dua buah warna, yaitu hitam (0) dan putih (1)



b. Grayscale Image

Gambar disimpan dalam bentuk matriks yang elemen-elemennya berada di dalam rentang 0 (hitam) sampai 255 (putih). Bilangan diantara 0 & 255 merepresentasikan warna abu-abu. Representasi gambar dalam bentuk *grayscale image* sering digunakan dalam pemrosesan citra. Gambar berikut direpresentasikan dalam bentuk *grayscale image*, (kanan) cuplikan isi matriks pada

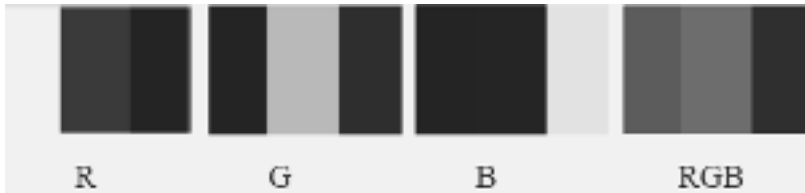
gambar. Perhatikan bahwa nilai elemen-elemen matriks berada pada rentang 0-255



c. RGB

Gambar disimpan dalam bentuk matriks, yang elemennya berupa tripel (x_1, x_2, x_3) dimana x_1 adalah intensitas warna merah, x_2 adalah warna hijau dan x_3 adalah warna biru. Intensitas masing-masing warna berada dalam rentang 0 – 255. Perhatikan gambar di bawah. Pada komponen R (merah), bagian kiri gambar memiliki intensitas yang tinggi (ditunjukkan dengan *grayscale image* yang berwarna putih). Ini menunjukkan bahwa intensitas warna merah paling tinggi berada di bagian kiri gambar. Untuk mengolah gambar dalam format RGB, gambar dipisahkan terlebih dahulu menurut komponen-komponennya. Selanjutnya, komponen-komponen itu diproses dengan menganggap komponen

tersebut sebagai *grayscale*. Setelah diproses, komponen itu digabungkan kembali menjadi gambar RGB yang utuh



d. Indexed Image

Gambar disimpan pada dua buah matriks. Matriks pertama memiliki ukuran yang sama dengan jumlah pixel pada gambar. Setiap elemen pada matriks ini adalah sebuah bilangan yang merupakan kode warna. Sementara itu, matriks kedua (disebut juga *color map*) menyimpan nilai intensitas warna yang bersesuaian dengan kode warna pada matriks pertama.

$$G_{rgb} = \begin{pmatrix} (0,70,32) & (0,100,30) \\ (0,70,32) & (0,100,30) \end{pmatrix}$$

$$G_{ind} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Map = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 32 \\ 0 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

Matriks di atas menunjukkan konversi gambar yang direpresentasikan dengan RGB menjadi *indexed image*. Pada *indexed image*, kode warna 0 mengacu pada (0, 70, 30) dan kode warna 1 mengacu pada (0, 100, 30).

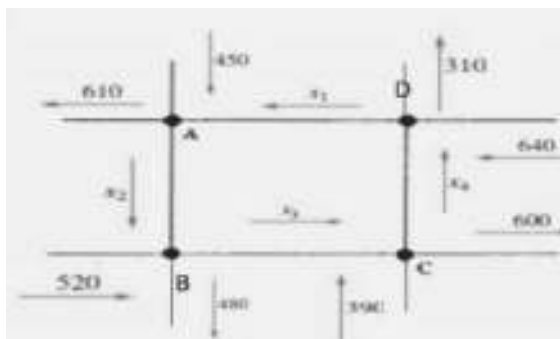
Representasi gambar menggunakan *indexed image* dapat mengurangi besarnya ukuran penyimpanan data.

Selain itu permasalahan yang rumit di dunia teknik sipil dapat diselesaikan dengan menggunakan matriks dengan lebih mudah dan efisien. Salah satunya adalah penyelesaian seluruh persamaan dalam penyelesaian mekanika teknik bangunan gedung bertingkat yang tentu saja persamaannya akan sangat banyak dan rumit. Tetapi dengan bantuan matriks maka penyelesaian dapat lebih disederhanakan. Selain itu, pada analisis matriks terdapat dua cara yang digunakan dalam teknik sipil, yaitu metode kekakuan dan metode fleksibilitas.

Pada teknik sipil juga dikenal analisis derajat ketidaktentuan kinematis. Analisa ini dimulai dengan mengambil lendutan di titik-titik diskrit sebagai sasaran yang harus dihitung. Ini dilakukan untuk mengetahui dimana harus dipasang besaran lendutan yang akan dicari tersebut. Hal pertama yang harus diketahui adalah berapa derajat ketidak tentuan kinematis atau istilah lainnya derajat kebebasan dari struktur. Derajat ketidaktentuan kinematis adalah suatu besaran yang

menyatakan jumlah komponen bebas dari lendutan di titik diskrit yang mungkin terjadi yang berhubungan dengan diberikannya suatu pembebanan pada struktur. Derajat ketidaktentuan ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks untuk setiap titik diskrit yang mungkin terjadi.

Sementara aplikasi matriks pada teknik mesin dapat digunakan pada sistem perpipaan. Misal diketahui sistem perpipaan seperti pada gambar di bawah. Jika diketahui debit aliran pada $x_4 = 300$ liter per jam maka tentukan debit aliran pada x_1 , x_2 , dan x_3 . Penentuan solusi dari masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan untuk masing-masing node A, B, C, dan D.



LATIHAN SOAL

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -12 & 16 & 20 \\ -2 & 7 & 4 & 6 & -3 \\ 1 & 5 & -6 & 12 & 4 \\ -11 & 4 & 10 & 15 & 5 \end{bmatrix}$

- Tentukan ordo matriks A
- Sebutkan elemen-elemen pada baris ke-2
- Sebutkan elemen-elemen pada kolom ke-3
- Sebutkan elemen $a_{2,3}$
- Sebutkan elemen $a_{3,5}$

2. Tentukan nilai a dan b dari kesamaan matriks berikut :

a. $\begin{bmatrix} a+b \\ 2a-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a-5 \\ 6a+7b \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 7 & 5a-b \\ 2a+3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2a & 2+a \\ b+3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2b+1 \\ a+1 & a+b \end{bmatrix}$

3. Tentukan nilai x , y , dan z dari kesamaan matriks berikut:

a.
$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 1-y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x-1 \\ z & -2 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -y & z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & x-1 \\ y & z \end{bmatrix}$$

c.
$$\begin{bmatrix} x-5 \\ 3-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-11 \\ y+9 \end{bmatrix}$$

4. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 2x-y & 3x \\ x+2y & x+y \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2y & -1 \end{bmatrix}$

Jika $P = Q^T$, maka tentukan $x - y$

5. Selesaikan operasi matriks berikut :

a.
$$\begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7a \\ -3b \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 2m \\ 3n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c.
$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ 3a & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 2b \\ -4a & b \end{bmatrix}$$

d.
$$\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ -x & 2y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & -y \\ -x & 2y \end{bmatrix}$$

6. Diketahui

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \text{ dan } R = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

- a. $P + Q$
- b. $Q - R$
- c. $(P + Q) - R$
- d. $P + (Q - R)$

7. Tentukan matriks X nya, jika X berordo 2×2

a. $X + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $X - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

8. Tentukan x, y, w, dan z jika diketahui :

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 6 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

9. Diketahui matriks-matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

- a. $A.B$
- b. $B.A$
- c. $B.C$
- d. $(A.B).C$
- e. $A.(B.C)$
- f. Buatlah kesimpulan untuk a dan b, serta d dan e

10. Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{bmatrix}$, dan $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai d jika $P + Q^T = R^2$

11. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan :

$$\begin{bmatrix} 4 & x-2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Tentukan nilai x dan y dari persamaan berikut :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

13. Tentukan matriks X nya :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Tentukan nilai $x + y$, jika diketahui :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

15. Dengan menggunakan matriks selesaikan sistem persamaan linear berikut :

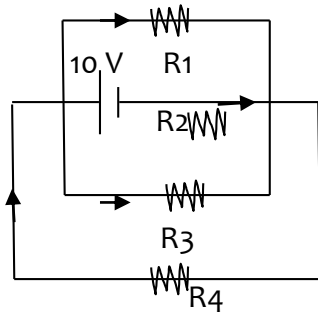
a. $2x - 3y = -1$

$$x + 2y = 11$$

b. $3x + y = 7$

$$x - 3y = -1$$

16. Tentukan nilai I_1, I_2, I_3, I_4 pada rangkaian listrik berikut!



Vektor dan Aplikasinya

A. Pengertian Skalar Dan Vektor

Besaran-besaran Fisika ditinjau dari pengaruh arah terhadap besaran tersebut dapat dikelompokkan menjadi :

1. Skalar : besaran yang cukup dinyatakan besarnya saja (tidak tergantung pada arah). Misalnya : massa, waktu, dan energi .
2. Vektor : besaran yang tergantung pada arah. Misalnya : kecepatan, gaya, momentum.

Besaran Vektor dapat disajikan dengan menggunakan suatu bilangan real, kemudian diikuti dengan sistem suatu yang sesuai. Secara geometri, besaran vektor dapat disajikan dengan ruas garis berarah. Panjang ruas garis menyatakan panjang atau besar vektor, sedangkan arah anak panah menunjukan arah vektor.

B. Notasi Vektor

1. Notasi Geometris.

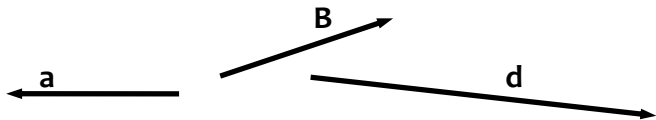
a. Penamaan sebuah vektor

Dalam cetakan : dengan huruf tebal : **a, B, d.**

Dalam tulisan tangan : dengan tanda $\overrightarrow{\quad}$ atau $\rightarrow$ diatas huruf $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{d}$

b. Penggambaran vektor

Vektor digambar dengan anak panah seperti pada gambar berikut.

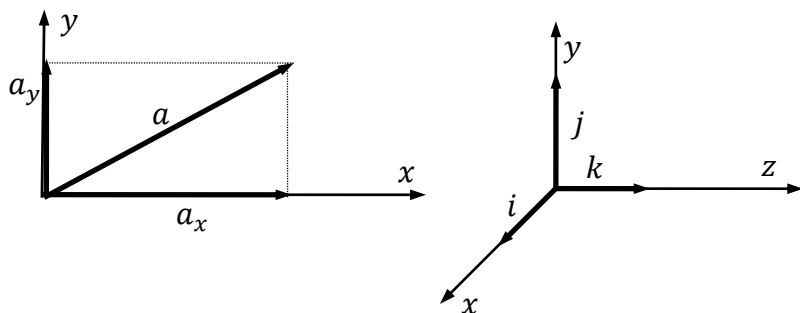


Panjang anak panah menunjukkan besar vektor.

Arah anak panah menunjukkan arah vector.

2. Notasi Analitis

Notasi analitis digunakan untuk menganalisa vektor tanpa menggunakan gambar. Sebuah vektor a dapat dinyatakan dalam komponen-komponennya sebagai berikut :



a_y : besar komponen vektor a dalam arah sumbu y

a_x : besar komponen vektor a dalam arah sumbu x

3. Dalam koordinat kartesian :

Dalam koordinat kartesian, kita mengenal vektor arah /vektor satuan, yaitu vektor yang besarnya 1 dan arahnya sesuai dengan yang didefinisikan. Misalnya dalam koordinat kartesian : i , j , k . yang masing masing menyatakan vektor dengan arah sejajar sumbu x , sumbu y dan sumbu z . Sehingga vektor a dapat ditulis :

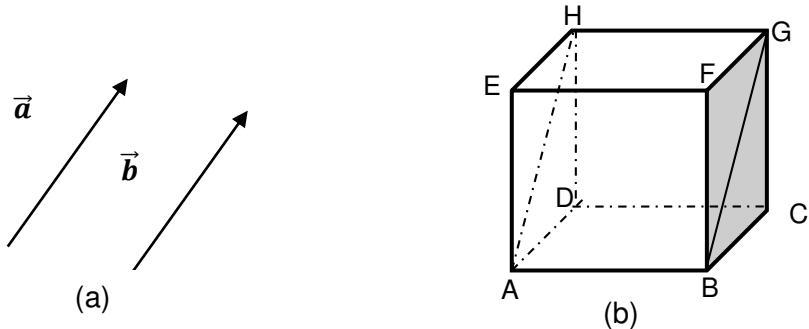
$$\vec{a} = a_x i + a_y j$$

dan besar vektor a adalah :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

4. Kesamaan Vektor

Dua vektor **a** dan **b** dikatakan sama (*ekuivalen*), jika dan hanya jika kedua vektor itu mempunyai panjang dan arah yang sama. Dua vektor yang sama, ditulis $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (perhatikan gambar a). Sebagai contoh, perhatikan kubus ABCD.EFGH pada gambar b. Misalnya $\overrightarrow{AH}$ wakil dari vektor **a** dan $\overrightarrow{BG}$ wakil dari vektor **b**, maka $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (**a** sama dengan/ ekuivalen **b**) sebab $\overrightarrow{AH}$ dan $\overrightarrow{BG}$ mempunyai arah dan panjang yang sama.

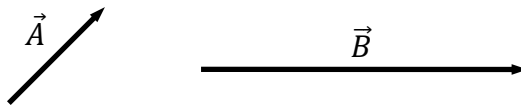


C. Vektor Satuan dan Vektor Nol

Jika sebuah vektor **A** dibagi dengan besarnya, $\frac{\vec{A}}{[\vec{A}]} = \frac{\vec{A}}{A}$ diperoleh sebuah vektor yang besarnya satu arahnya searah

vektor A. Vektor ini disebut vektor satuan dari vektor A biasa dinotasikan sebagai $\hat{a}$. Sehingga $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{[\vec{A}]} = \frac{\vec{A}}{A}$.

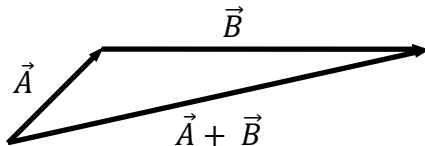
D. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Vektor



Jika diketahui dua vektor A dan B seperti pada gambar di atas, bagaimana kita menjumlahkan kedua vektor $(\vec{A} + \vec{B})$ tersebut?

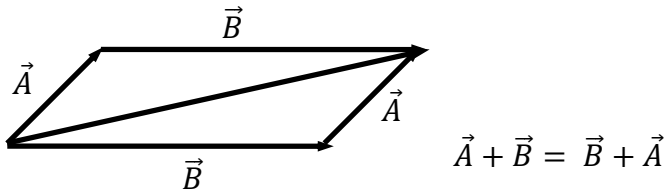
Tanda + dalam penjumlahan vektor mempunyai arti dilanjutkan.

Jadi $\vec{A} + \vec{B}$ mempunyai arti vektor A dilanjutkan oleh vektor B.

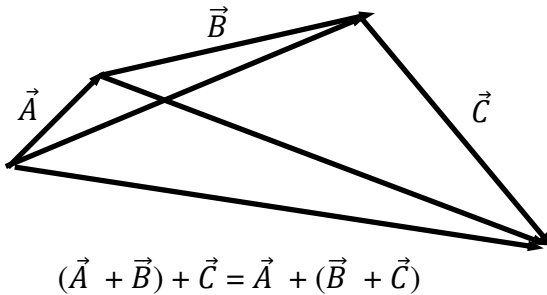


Dalam operasi penjumlahan berlaku :

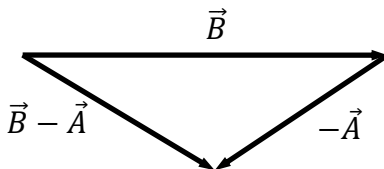
1. Hukum komutatif



2. Hukum Asosiatif



Operasi pengurangan dapat dijabarkan dari operasi penjumlahan dengan menyatakan negatif dari suatu vector, yaitu $\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + (-\vec{A})$



Vektor secara analitis dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \text{ dan}$$

$$B = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

Maka operasi penjumlahan/pengurangan dapat dilakukan dengan cara menjumlah/mengurangi komponen-komponennya yang searah.

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) i + (A_y + B_y) j + (A_z + B_z) k$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x) i + (A_y - B_y) j + (A_z - B_z) k$$

Contoh :

1. Jika $\vec{A} = 5i + 6j + 4k$ dan $\vec{B} = 2i + 3j$, tentukan :
 - a. Besar vektor A dan vektor B
 - b. Penjumlahan dan pengurangan dari kedua vektor
 - c. Arah cosinus dari penjumlahan kedua vektor

Penyelesaian :

- a. $\vec{A} = 5i + 6j + 4k$ dan $\vec{B} = 2i + 3j$

$$|\vec{A}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77}, \quad |\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

- b. $\vec{A} + \vec{B} = (5+2)i + (6+3)j + (-4+0)k = \vec{A} = 7i + 9j - 4k$

$$\vec{A} - \vec{B} = (5-2)i + (6-3)j + (-4-0)k = \vec{A} = 3i + 3j - 4k$$

- c. Komponen penjumlahan vektor pada sumbu x=7,
Komponen penjumlahan vektor pada sumbu y=9,
Komponen pada sumbu z=4, dan besar vektor penjumlahan adalah:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{7^2 + 9^2 + 4^2} = \sqrt{146}$$

Maka arah cosinus pada penjumlahan vektor A dan vektor B adalah

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{146}}, \cos \beta = \frac{9}{\sqrt{146}}, \cos \gamma = \frac{-4}{\sqrt{146}}$$

2. Dua buah vektor gaya $\vec{F}_1 = 10\text{N}$, $\vec{F}_2 = 5\text{N}$ terletak dalam bidang (x,y) dengan membentuk sudut masing-masing 30° , 90° , dengan sumbu x. Tentukan besar dari penjumlahan kedua vektor gaya tersebut serta arahnya.

Penyelesaian :

Cari komponen setiap gaya, kemudian jumlahkan setiap komponen yang sejenis, maka besar resultan gaya R dan arah resultan gaya α dapat dihitung .

$$\vec{F}_1 = 10\text{N}, \vec{F}_{1x} = \vec{F}_1 \cos \alpha = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{1y} = \vec{F}_1 \sin \alpha = 10 \sin 30^\circ = 5 \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = 5\text{N}, \vec{F}_{2x} = \vec{F}_2 \cos \alpha = 5 \cos 90^\circ = 0 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{2y} = \vec{F}_2 \sin \alpha = 5 \sin 90^\circ = 5 \text{ N}$$

Dan resultan gaya,

$$R_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = 5\sqrt{3} \text{ N}, R_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = 10 \text{ N}$$

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = 5\sqrt{3}\text{N} + 10\text{N}, R = \sqrt{125 + 100} = \sqrt{225} = 15$$

$$\cos \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E. Operasi Perkalian Vektor

1. Perkalian vektor dengan skalar

Contoh perkalian besaran vektor dengan skalar dalam fisika : $F = ma$, $p = mv$, dimana m : skalar dan a, v : vektor.

Bila misal A dan B adalah vektor dan k adalah skalar maka, $B = k A$

Besar vektor B adalah k kali besar vektor A sedangkan arah vektor B sama dengan arah vektor A bila k positif dan berlawanan bila k negatif. Contoh : $F = qE$, q adalah muatan listrik dapat bermuatan positif atau negatif sehingga arah F tergantung tanda muatan tersebut.

2. Perkalian vektor dengan vektor.

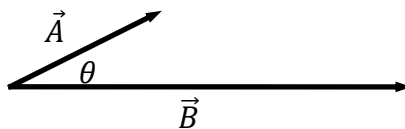
a. Perkalian dot (titik)

Contoh dalam Fisika perkalian dot ini adalah : $W = F \cdot$

s ,

$P = F \cdot v$, $\Phi = B \cdot A$.

Hasil dari perkalian ini berupa skalar.



Bila C adalah skalar maka

$$\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \vec{B} \cos \theta$$

atau dalam notasi vektor

$$\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Dalam perkalian dot, berlaku sifat komutatif dan distributif, yaitu

- Komutatif: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Distributif: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Contoh:

1. Tentukan sudut antara $A = 2i + j - k$ dan $B = 2i - 2j$.

Penyelesaian :

Karena yang akan dihitung adalah sudut diantara dua vektor maka kita gunakan perkalian dot pada kedua vektor tersebut.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-2i + j - 2k) \cdot (2i - 2j) = -4 - 2 + 0 = -6$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3,$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{A}||\vec{B}| = (3)(2\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-6}{6\sqrt{2}} \text{ atau } \alpha = 135^\circ$$

2. Diketahui $\vec{A} = 2i - j + 2k$

a. Tentukan vector satuan yang searah dengan $\vec{A}$

b. Cari vektor yang sejajar dengan $\vec{A}$ yang besarnya 12

Penyelesaian :

a. Vektor satuan sejajar $A = 2i - j + 2k$

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2i-j+2k}{|2i-j+2k|} = \frac{2i-j+2k}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{2i-j+2k}{3}$$

Misalkan vektor yang sejajar dengan $\vec{A} = 2i - j + 2k$ dan mempunyai besar 12 adalah vektor B

$$\vec{B} = B_x i - B_y j + B_z k$$

Untuk dapat mencari setiap komponen vector B, gunakan persamaan

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

$$\frac{2}{B_x} = \frac{-1}{B_y} = \frac{2}{B_z}$$

Dari persamaan ini diperoleh hubungan

$$2B_y = -B_x \text{ atau } B_y = -\frac{1}{2} B_x$$

$$2B_y = 2B_x \text{ atau } B_y = B_x$$

Sekarang sisipkan komponen-komponen kedalam persamaan

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$$B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = 144$$

$$B_x^2 + \frac{1}{2}B_y^2 + B_z^2 = 144$$

Diperoleh,

$$B_x = 8, B_y = -4 B_z = 8$$

Karena ketiga komponen sudah didapat maka vector B yang sejajar vector A yang mempunyai besar 12 adalah :

$$\vec{B} = B_x^2 i + B_y^2 j + B_z^2 k = 8 i - 4j + 8k$$

b. Perkalian cross (silang)

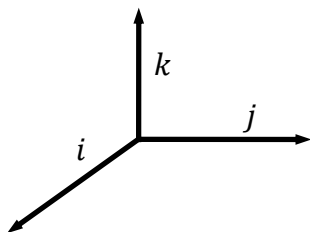
Bila C merupakan besar vektor C, maka

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \vec{B} \sin \theta$$

atau dalam notasi vektor diperoleh :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k$$

Karena hasil yang diperoleh berupa vektor maka arah dari vektor tersebut dapat dicari dengan arah maju sekrup yang diputar dari vektor pertama ke vektor kedua.



Berikut ini sifat-sifat perkalian silang pada vektor satuan yang sejenis:

- $i \times i = 1 \times 1 \times \sin 0^\circ = 0$
- $j \times j = 1 \times 1 \times \sin 0^\circ = 0$
- $k \times k = 1 \times 1 \times \sin 0^\circ = 0$

Berikut ini sifat-sifat perkalian silang pada vektor satuan yang tidak sejenis:

- $i \times j = k$
- $j \times k = i$
- $k \times i = j$
- $i \times k = -j$
- $k \times j = -i$
- $j \times i = -k$

Contoh:

Tentukan vektor yang tegak lurus terhadap vektor $i - 3j + 2k$ dan $5i - j - 4k$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} (i - 3j + 2k) \times (5i - j - 4k) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= ((12 + 2)i + (10 + 4)j + ((-1) + 15)k) \\ &= 14i + 14j + 14k \end{aligned}$$

3. Perkalian Tiga Vektor

- a. Perkalian tiga vektor yang menghasilkan skalar

Perkalian tiga vektor $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ yang menghasilkan skalar dapat ditulis sebagai:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$$

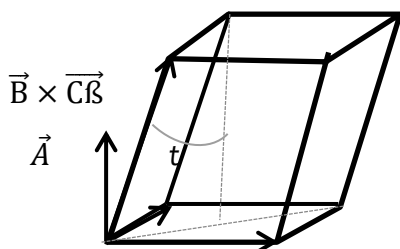
Contoh:

Buktikan bahwa volume sebuah paralelepipedum yang sisinya vektor A, B, C adalah $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$.

Bukti:

Sekarang, marilah kita memperhatikan gambar dibawah ini:

Luas alas dengan sisi-sisi vektor $\vec{B}$, $\vec{C}$ adalah $\vec{B} \times \vec{C}$
 $= |\vec{B}||\vec{C}| \sin \alpha$ dan vektor ini tegak lurus terhadap bidang alas.



Tinggi paralelepiped ditarik dari terminal vektor $\vec{A}$, besarnya $t = |\vec{A}| \cos \beta$ adalah sudut diantara vektor $\vec{A}$ dan tinggi t . Karena tinggi t sejajar dengan vektor tegak lurus bidang alas atau $t \parallel (\vec{B} \times \vec{C})$ maka sudut β sama dengan sudut antara vektor dengan $(\vec{B} \times \vec{C})$. Dengan demikian volume paralelepiped dapat ditentukan sebagai berikut :

$$\text{Volume} = (\text{Luas alas}) (\text{tinggi})$$

$$\begin{aligned} V &= [|\vec{B}||\vec{C}| \sin \alpha][|\vec{A}| \cos \beta] \\ &= (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \end{aligned}$$

- b. Perkalian tiga vektor yang menghasilkan vektor
Perkalian tiga vektor A , B , C yang menghasilkan vektor dapat dinyatakan sebagai :

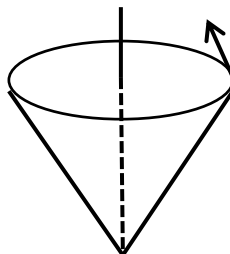
$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Pada $A \times (B \times C)$ diperoleh hasil cross vektor A dengan vektor yang dihasilkan $(B \times C)$. Untuk perkalian $A \times (B \times C)$ diperoleh vektor dari hasil perkalian $(A \times B)$ dengan vektor C . Jadi tanda kurung pada perkalian tiga vektor perlu dituliskan karena arah vektor yang dihasilkan dari perkalian tiga vektor _ditentukan oleh vektor yang mana terlebih dahulu dicrosskan.

Contoh:

Tentukan momentum sudut, L dari massa m yang diputar dengan sudut.

Perhatikan gambar berikut:



Kita ketahui momentum sudut, L dirumuskan sebagai :

$$L = r \times m v = m r \times v$$

Disubstitusikan

$$V = \omega \times r$$

Ke dalam persamaan, diperoleh momentum sudut dalam bentuk perkalian tiga vektor yang menghasilkan vektor,

$$L = r \times m v = m r \times (\omega \times r)$$

F. Diferensiasi Vektor

Pada vektor berlaku semua aturan dalam kalkulus. Fungsi vektor adalah vektor yang bergantung dari variabel skalar. Diferensiasi biasa untuk fungsi bergantung dari satu variabel dan diferensiasi parsial diperoleh dari diferensiasi terhadap fungsi vector yang bergantung dari lebih satu **variabel bebas**.

1. Diferensiasi Biasa dari Vektor

Jika diketahui fungsi scalar $\varphi(t)$ dan fungsi vector $A(t) =$

$A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}$ dan $B(t) = B_x(t)\mathbf{i} + B_y(t)\mathbf{j} + B_z(t)\mathbf{k}$ maka kita dapat menyatakan

a. Diferensiasi dari vector A,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z(t)}{dt}\mathbf{k}$$

b. Diferensiasi dari perkalian fungsi skalar $\varphi(t)$ dengan fungsi vector A(t) adalah

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)]A(t) = \frac{d\varphi}{dt}A + \varphi \frac{dA}{dt}$$

c. Diferensiasi dari vector A(t) dot vector B(t) adalah,

$$\frac{d}{dt}[A(t) \cdot B(t)] = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

d. Diferensiasi dari vector A(t) cross vector B(t) adalah,

$$\frac{d}{dt}[A(t) \times B(t)] = \frac{d\vec{A}}{dt} \times B + A \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

2. Diferensiasi Parsial dari Vektor-Vektor

Jika A adalah suatu vector yang bergantung pada lebih dari satu variabel skalar, katakan x, y, z misalnya maka diferensiasi parsial dari A (x, y, z) terhadap masing-masing variabel dituliskan sebagai :

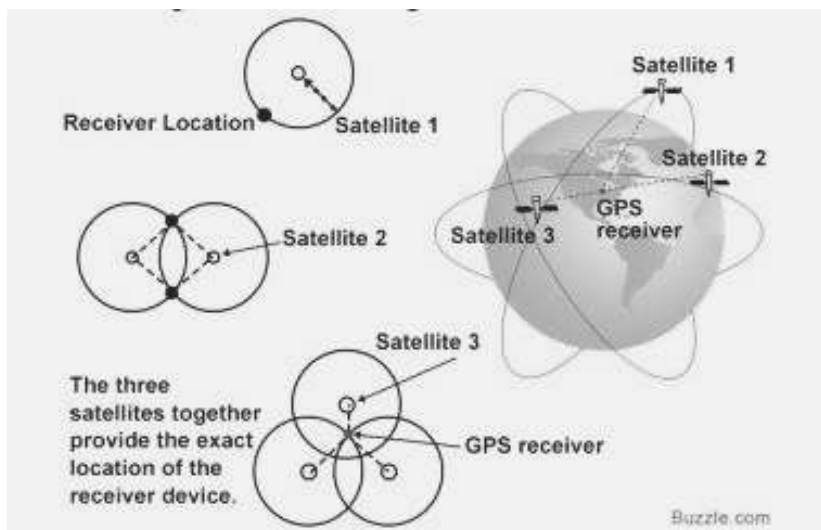
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}; \text{ jika } y, z \text{ dianggap konstan}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}; \text{ jika } x, z \text{ dianggap konstan}$$

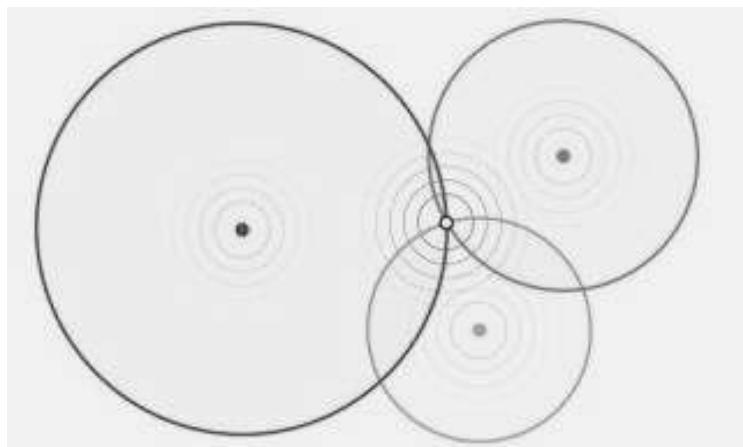
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}; \text{ jika } x, y \text{ dianggap konstan}$$

G. Penerapan Vektor dalam Sains, Teknologi, dan Engineering

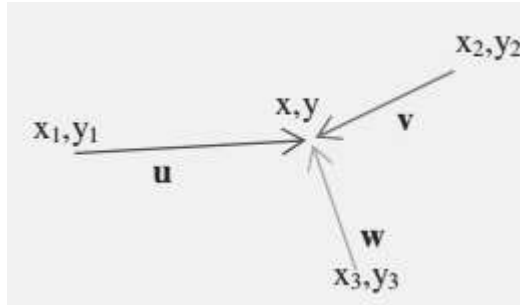
Dalam dunia teknologi, kita mengenal yang namanya GPS (Global Positioning System). GPS adalah system yang dibuat untuk menentukan letak suatu benda di permukaan bumi dengan bantuan penyelarasan sinyal satelit. Tanpa kita sadari, prinsip kerja GPS secara tak langsung juga menerapkan vector. Cara GPS dalam menentukan posisi suatu benda bergantung pada perhitungan data-data yang diterima dari satelit-satelit. Receiver system pada GPS kemudian menghitung jarak dari setiap satelit dan menentukan posisinya. Metode ini kemudian dapat disebut sebagai metode trilateration. Berikut ilustrasi metode trilateration.



Ilustrasi tersebut dapat kita ubah ke bentuk R2, yaitu



Sedangkan dalam bentuk vector, kita peroleh.

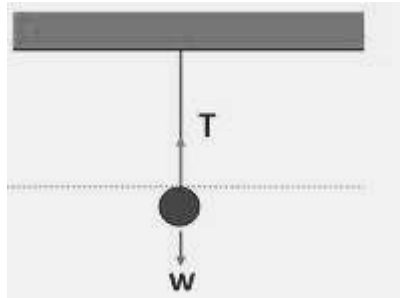


Berdasarkan ilustrasi tersebut, dapat kita tentukan posisi suatu benda dengan menghitung jarak setiap satelit ke receiver.

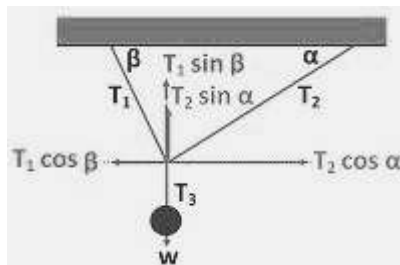
Selain dalam teknologi dan engineering, dalam pembelajaran sains kita mengenal vektor sebagai salah satu jenis besaran. Besaran merupakan segala sesuatu yang dapat diukur dan dinyatakan dengan angka. Berdasarkan nilai dan arahnya, terdapat dua jenis besaran, yaitu besaran skalar dan besaran vektor. Besaran skalar merupakan besaran yang hanya memiliki nilai. Sedangkan besaran vektor merupakan besaran yang memiliki nilai dan arah. Contoh besaran vektor yaitu gaya, berat, kuat arus, kecepatan, percepatan, perpindahan, posisi, dan lain-lain. Berikut ini contoh penerapan vektor dalam fisika.

1. Gaya tegang tali yang menopang benda tergantung pada tali tersebut, membentuk dua vektor gaya yang

saling seimbang (diam), dimana $T = w$. Hal ini diilustrasikan pada gambar berikut.

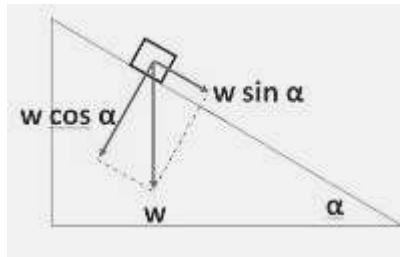


2. Benda yang digantung dengan tiga tali berikut, mengakibatkan keseimbangan gaya. Gaya ke bawah (berat benda) sama dengan jumlah gaya ke atas, secara matematis dapat dirumuskan sebagai $T_1 \sin \beta + T_2 \sin \alpha$. Sedangkan gaya ke kiri sama dengan gaya ke kanan, yaitu $T_1 \cos \beta = T_2 \cos \alpha$, seperti pada gambar berikut.

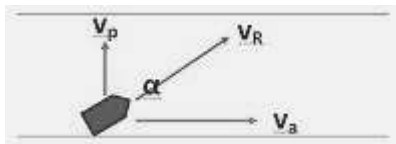


3. Benda yang menuruni sebuah bidang miring. Suatu benda yang diletakkan di suatu bidang miring dapat

turun karena terdapat komponen gaya berat searah dengan bidang miring. Sedangkan besarnya gaya normal sama dengan komponen gaya berat tegak lurus bidang miring. Untuk dapat menyelesaikan permasalahan ini, diperlukan penguraian vektor pada benda terhadap bidang miringnya seperti pada gambar berikut.

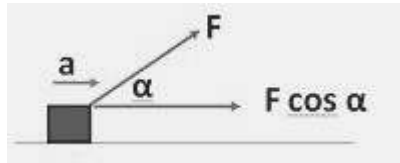


4. Arah gerak perahu merupakan resultan dari dua vektor kecepatan yaitu kecepatan perahu dan kecepatan air. Penguraian vektor pada arah gerak perahu dapat diilustrasikan pada gambar berikut.

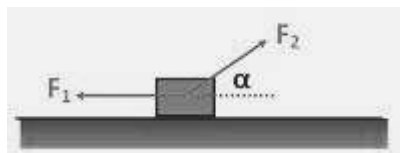


Perpindahan suatu benda dapat terjadi karena adanya usaha dan gaya. Dalam hal menghitung usaha, maka gaya yang membentuk sudut tertentu terhadap bidang

datar harus dibuat searah (di uraikan ke sumbu mendatar) sebelum dikalikan dengan vektor perpindahannya. Penguraian vektor gaya dalam perpindahan benda dapat dilihat pada gambar berikut.



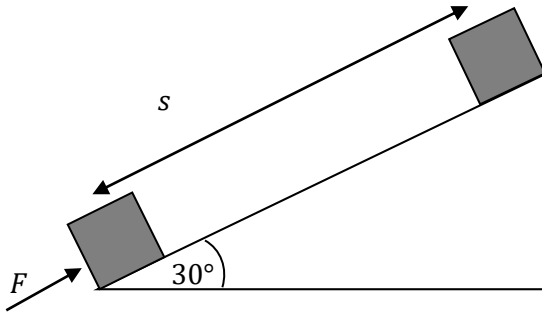
5. Memprediksi arah gerak suatu benda yang dipengaruhi dua gaya tidak segaris, pertama anda harus menguraikan gaya yang tidak segaris dengan perpindahan, kedua membandingkan besar gaya ke kanan (hasil penguraian) dan ke kiri. Anda akan peroleh resultan gaya, dari resultan tersebut diketahui arah perpindahannya.



Contoh:

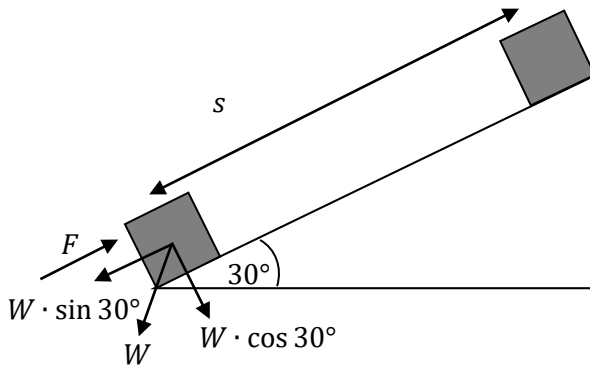
Sebuah balok bermassa 1.5 kg didorong ke atas oleh gaya konstan $F = 15 \text{ N}$ pada bidang miring seperti pada gambar.

Anggap percepatan gravitasi (g) 10 ms^{-2} dan gesekan antara balok dan bidang miring nol. Tentukan usaha total yang dilakukan pada balok.



Jawab:

Untuk menentukan besar usaha yang perlu dilakukan pada balok, terlebih dahulu kita uraikan vektor yang terjadi pada balok saat terletak di bidang miring.



Berdasarkan uraian vektor tersebut dan karena gesekan pada bidang adalah nol, maka resultan gaya pada sumbu bidang miring adalah:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= F - W \cdot \sin 30^\circ \\ &= F - m \cdot g \cdot \sin 30^\circ \\ &= 15 - 1.5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 15 - 7.5\end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = 7.5 \text{ N}$$

Jadi, total usaha yang dilakukan pada balok adalah

$$W = \Sigma F_x \cdot s$$

$$W = 7.5 \cdot 2 = 15 \text{ J}$$

Konsep vektor juga dapat digunakan untuk mengelompokkan tanaman berdasarkan tulang daunnya. Penerapan ini memanfaatkan pengolahan citra digital. Dengan mengukur besarnya sudut antaran cabang tulang daun level 0 dengan tulang daun utama. Seperti diketahui bahwa pengelompokan berdasarkan jenis tulang daun merupakan jenis klasifikasi buatan, yaitu pengelompokan makhluk hidup yang didasarkan atas adanya beberapa persamaan ciri morfologi, alat reproduksi, lingkungan tempat tumbuh, dan daerah penyebarannya tanpa memperhatikan

kesamaan struktur yang mungkin memperlihatkan hubungan kekerabatan. Berikut ini bentuk-bentuk tulang daun:

1. Bertulang menyirip

Daun ini mempunyai satu ibu tulang yang berjalan dari pangkal ke ujung, dan merupakan terusan tangkai daun. Dari ibu tulang ini kesamping keluar tulang-tulang cabang, sehingga susunannya mirip sirip-sirip pada ikan. Contohnya adalah daun mangga, daun jambu, daun nangka, dan daun rambutan.

2. Bertulang menjari

Tipe tulang daun yang memperlihatkan susunan seperti jari-jari pada tangan (dari ujung tangkai daun keluar beberapa tulang yang memencar). Daun dengan susunan tulang menjari umumnya hanya terdapat pada tumbuhan berbiji belah. Contohnya adalah daun pepaya, daun singkong, kapas dan daun jarak.

3. Bertulang melengkung

Tipe daun ini mempunyai beberapa tulang yang besar, satu ditengah, yaitu yang paling besar, sedangkan lainnya mengikuti jalannya tepi daun (memencar kemudian kembali menuju ke satu arah ke ujung daun). Tipe susunan

tulang daun ini umumnya dijumpai pada tumbuhan ber biji tunggal (*monocotyledoneae*).

4. Bertulang sejajar

Biasanya terdapat pada daun-daun bangun garis atau bangun pita, yang mempunyai satu tulang di tengah yang besar membujur daun, sedang tulang-tulang lainnya jelas lebih kecil dan nampaknya semua mempunyai arah yang sejajar dengan ibu tulang. Tipe susunan tulang daun yang demikian lazimnya terdapat pada tumbuhan ber biji tunggal (*Monocotyledoneae*). Contohnya adalah tebu, padi, dan semua jenis rumput.

Jika diperhatikan dari 4 pengelompokan tanaman berdasarkan bentuk tulang daun, setiap kelompok memiliki sudut yang unik antara tulang daun utama dan cabangnya. Perhatikan gambar berikut:



Dengan mengukur besar sudut antara tulang daun utama dengan cabangnya menggunakan aljabar vektor kita dapat mengetahui perbedaan antara tanaman dalam kelompok tulang daun sejajar, tulang daun menyirip, tulang daun melengkung ataupun tulang daun menjari. Didapat hasil jika sudut tersebut memiliki besar sudut hampir semua sama dari pangkal daun sampai ujung maka daun tersebut akan dikelompokkan ke dalam daun sejajar atau daun menyirip. Jika memiliki sudut sekitar 30 sampai 40 derajat maka dapat disimpulkan daun tersebut adalah daun menyirip, jika rata-rata dibawah 30 derajat maka dapat disimpulkan bahwa daun tersebut adalah daun sejajar. Sedangkan dengan daun melengkung dan menjari relative lebih mudah, kedua tipe daun ini memiliki sudut yang besar pada tulang daunnya dan jika sudutnya melebihi 90 derajat maka diyakini bahwa daun tersebut adalah tipe daun menjari. Sedangkan dengan rata-rata 40 sampai 60 derajat maka daun tersebut akan dikelompokkan pada daun melengkung.

SOAL PENERAPAN VEKTOR DALAM PEMBELAJARAN SAINS

1. Sebuah elektron bergerak dengan kecepatan 10^6 m/s, dengan arah mengapit sudut 45° dengan sumbu X dan 45° dengan sumbu Y dalam medan magnet dengan induksi magnet $0,2$ W/m² dengan arah mengapit sudut 60° dengan sumbu X, 60° dengan sumbu Y dan 45° dengan sumbu Z. Tentukan besar gaya pada elektron !
2. Sebuah partikel bergerak lengkung mempunyai persamaan parameter $X = e^{-t}$, $Y = 2 \cos 3t$, $Z = 2 \sin 3t$ dengan t waktu. Tentukan kecepatan dan vektor percepatan setiap waktu. Hitung besar V dan a pada saat $t = 0$
3. Diberikan gaya $F = 3i + 2j + 4k$ bekerja pada titik $(1, -1, 2)$, tentukan momen gaya tersebut terhadap titik $(2, -1, 3)$
4. Hitunglah usaha untuk menggerakkan sebuah benda dengan vektor $r = 3i + 2j - 5k$, jika dipengaruhi oleh gaya $F = 2i - j - k$

Fungsi dan Aplikasinya

A. Pengertian Fungsi

Antara anggota-anggota dari suatu himpunan dapat terjadi suatu relasi dengan anggota-anggota dari himpunan yang lain. Misalnya antara anggota-anggota himpunan semua pria dengan anggota-anggota semua wanita dapat diadakan relasi “suami”.

Secara matematis suatu relasi R antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B dapat dipandang sebagai himpunan bagian dari produk Cartesius kedua himpunan itu.

$$R \subseteq A \times B.$$

Misalnya : $A = \{ 1, 3, 5 \}$ dan $B = \{ 2, 0, 4 \}$, maka relasi "lebih kecil" antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B dapat disajikan dengan: $R = \{ (1, 2), (1, 4), (3, 4) \} \subseteq A \times B$.

Fungsi atau pemetaan adalah suatu relasi khusus antara anggota-anggota dua buah himpunan. Sehingga fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Suatu relasi antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B disebut Fungsi (pemetaan) bhab relasi itu mengkaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Suatu fungsi biasanya disajikan dengan lambang f . Jika fungsi f mengkaitkan anggota-anggota himpunan A, maka dikatakan bahwa f adalah fungsi dari A ke B dan disajikan dengan lambang:

$$f : A \rightarrow B$$

A disebut daerah asal (daerah sumber, domain) dari fungsi f , sedangkan B disebut daerah kawan. (daerah jajahan , kodomain) dari fungsi f . Jika $x \in A$ oleh fungsi f dikaitkan (dikawankan) dengan suatu anggota dari B, maka anggota dari B itu disebut "bayangan dari x " dan disajikan dengan lambang " $f(x)$ ". $f(x)$ seringkali juga disebut "nilai fungsi" untuk x .

Secara simbolis matematis, definisi fungsi f dapat disajikan sbb.

$$f : A \rightarrow B \text{ b h b. } (\forall x \in A). (\exists ! y \in B). y = f(x)$$

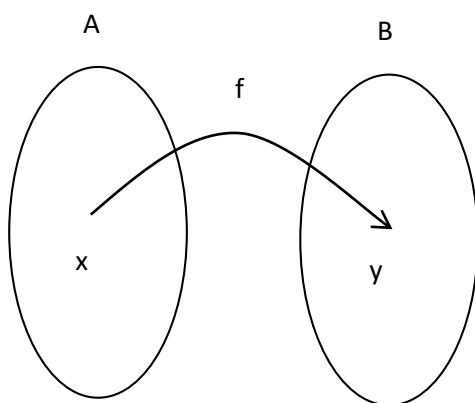
Perhatikan bahwa suatu fungsi f dari A ke B adalah suatu relasi yang mempunyai dua sifat khusus, yaitu:

- Setiap anggota himpunan A (daerah asal) dikawankan dengan anggota himpunan B (Seringkali dikatakan bahwa "daerah asal dihabiskan"
- Kawan dari anggota-anggota himpunan A (daerah asal) adalah tunggal. Sifat ini dapat dinyatakan secara simbolis:

$$(\forall x_1, x_2 \in A). x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Pada umumnya, untuk suatu fungsi $f : A \rightarrow B$, anggota-anggota dari himpunan B (daerah kawan) tidak perlu mempunyai kawan anggota himpunan A (daerah kawan tidak perlu di habiska), dan jika anggota himpunan B mempunyai kawan anggota himpunan A, kawannya di A itu tidak harus tunggal.

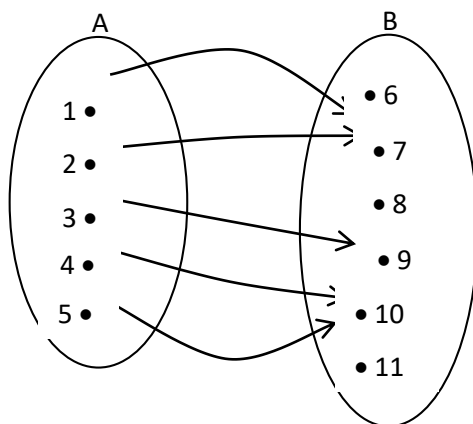
Suatu fungsi f dari A ke B dapat diilustrasikan dengan diagram panah sebagai berikut.



Himpunan semua anggota himpunan B yang merupakan bayangan dari suatu anggota himpunan A disebut daerah hasil (range) dari fungsi f dan disajikan dengan R_f . Jadi:

$$R_f = \{ y \in B \mid (\exists x \in A). y = f(x) \}$$

Misalnya untuk fungsi $f : A \rightarrow B$ yang disajikan dengan diagram panah sebagai berikut.



$$f(1) = f(2) = 7 ; f(3) = 9 ; f(4) = f(5) = 10$$

$$R_f = \{7, 9, 10\}$$

Seperti telah diuraikan di atas, jika suatu anggota dari daerah kawan mempunyai kawan anggota dari daerah asal, maka kawannya itu tidak harus tunggal. Himpunan semua anggota dari daerah asal yang merupakan kawan dari suatu anggota daerah kawan disebut bayangan invers dari y dan disajikan dengan lambang $f^{-1}(y)$. Jadi:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid y = f(x)\}$$

Pada contoh fungsi : $f : A \rightarrow B$ di atas:

$$f^{-1}(7) = \{1, 2\};$$

$$f^{-1}(9) = \{3\};$$

$$f^{-1}(10) = \{4, 5\};$$

$$f^{-1}(6) = f^{-1}(8) = f^{-1}(11) = \emptyset.$$

Jika $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari A ke B, maka yang dimaksud dengan invers dari fungsi f , disajikan dengan f^{-1} , adalah relasi yang mengkaitkan anggota-anggota himpunan B dengan anggota-anggota himpunan A. Jelaslah bahwa pada umumnya invers dari suatu fungsi tidak merupakan fungsi (dari B ke A) melainkan hanyalah merupakan suatu relasi biasa.

B. Cara menyajikan fungsi

Ada dua macam cara untuk menyajikan suatu fungsi, yaitu :

- a. Cara aturan: fungsi itu disajikan dengan cara menyatakan aturan yang menentukan relasi antara anggota – anggota daerah asal dengan anggota – anggota daerah kawasannya.

Contoh :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dimana } f(x) = x^2$$

$\mathbb{R}$ = himpunan semua bilangan nyata.

- b. Cara himpunan : Seperti halnya relasi, maka fungsi f dari A ke B dapat dipandang sebagai himpunan bagian (khusus) dari $A \times B$.

Maka fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dimana $f(x) = x^2$ dapat juga disajikan sebagai suatu himpunan, yaitu himpunan bagian dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ dan } y = x^2 \}$$

Fungsi $f: A \rightarrow B$ yang digambarkan dengan diagram panah pada contoh diatas dapat juga disajikan sebagai:

$$f = \{ (1,7), (2,7), (3,9), (4,10), (5,10) \}$$

Perhatikan bahwa dalam penyajian fungsi dengan cara himpunan, setiap anggota dari daerah asalnya muncul tepat satu kali sebagai komponen yang pertama dari anggota – anggota himpunan itu.

C. Kesamaan dua buah fungsi.

Dua buah fungsi $f: A \rightarrow B$ dan $g: A \rightarrow B$ dikatakan sama jika kedua fungsi itu mengkaitkan anggota-anggota dari

daerah asalnya dengan anggota- anggota yang sama di daerah kawannya.

$$f = g \text{ bbb } (\forall x \in A). \quad f(x) = g(x)$$

Contoh :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2(x+1)(x-2)$, dan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

Karena $f(x) = 2(x+1)(x-2) = 2(x^2 - x - 2) = 2x^2 - 2x - 4 = g(x)$, maka $f = g$

D. Fungsi – fungsi Khusus

Beberapa fungsi khusus yang diberi sebutan karena sifat-sifat/ karakteristiknya adalah sebagai berikut.

- 1 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif dari A kepada (onto) B jika setiap anggota B merupakan bayangan dari suatu anggota A. Jadi pada fungsi yang surjektif, daerah hasilnya berimpit dengan daerah kawan (atau daerah kawannya dihabiskan).

$f : A \rightarrow B$ adalah fungsi surjektif bhb.

$$(\forall y \in B) (\exists x \in A). y = f(x) \text{ bhb } R_f = B \text{ bhb } (\forall y \in B) f^{-1}$$

$$(y) \neq \emptyset$$

Contoh :

$$A = \{x \mid x = \text{bilangan bulat} \}$$

$$B = \{x \mid x = \text{bilangan cacah} \}$$

$$f : A \rightarrow B \text{ dimana } f(x) = |x|$$

- 2 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif bila anggota – anggota dari B yang merupakan bayangan dari A , merupakan bayangan dari tepat satu anggota A . Dengan perkataan lain $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi injektif bhb. $(\forall x_1, x_2 \in A). x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ bhb. $(\forall x_1, x_2 \in A).$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Contoh:

$$A = \{x \mid x = \text{bilangan asli} \}$$

$$B = \{x \mid x = \text{bilangan nyata} \}$$

Fungsi f ini adalah fungsi yang injektif, karena jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 - 1 = x_2 - 1$ sehingga $x_1 = x_2$.

Fungsi f ini tidak surjektif karena ada anggota B yang tidak merupakan bayangan dari suatu anggota A , misalnya $\frac{1}{2} \in B$.

- 3 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ yang sekaligus surjektif dan injektif disebut daerah kawanannya merupakan bayangan dari tepat satu anggota dari daerah asalnya. Dengan demikian jika f adalah fungsi bijektif maka setiap anggota dari daerah asal mempunyai satu kawan di daerah kawan dan sebaliknya setiap anggota dari daerah kawan mempunyai satu kawan di daerah asal. Karena itu fungsi bijektif seringkali disebut juga korespondensi satu-satu.

Contoh :

$$A = \{x \mid x = \text{bilangan positif}\}$$

$$B = \{x \mid x = \text{bilangan nyata}\}$$

$$f : A \rightarrow B \text{ di mana } f(x) = \log x$$

Fungsi f surjektif karena setiap $y \in B$ merupakan bayangan suatu $x \in A$, yaitu $x = 10^y$.

Fungsi f ini injektif karena jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $\log x_1 = \log x_2$, sehingga

$$10^{\log x_1} = 10^{\log x_2}$$

$$x_1 = x_2.$$

Dengan demikian f adalah fungsi bijektif. Mudah dibuktikan bahwa f adalah fungsi bijektif bhab. f^{-1} merupakan fungsi.

Invers dari suatu fungsi bijektif disebut fungsi invers.

Jadi jika $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi bijektif, maka fungsi inversnya adalah $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Pada contoh diatas fungsi invers dari fungsi bijektif $f : A \rightarrow B$ di mana $f(x) = \log x$ ialah $f^{-1} : B \rightarrow A$ dimana $f^{-1}(y) = 10^y$.

- 4 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi konstan jika bayangan semua anggota A adalah satu anggota yang sama dari B .

$f : A \rightarrow B$ adalah fungsi konstan bhab $(\exists !c \in B)(\forall x \in A). f(x) = c$

- 5 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi identitas jika bayangan dari setiap anggota dari A ialah dirinya sendiri. (Daerah asal dan daerah kawan dari suatu fungsi identitas adalah himpunan yang sama).

$f : A \rightarrow A$ adalah fungsi identitas bbb. $(\forall x \in A). f(x) = x$

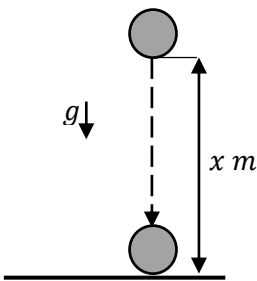
Jelaslah bahwa suatu fungsi identitas adalah fungsi yang bijektif.

E. Penerapan Fungsi dalam Sains, Teknologi, dan Engineering

Fungsi merupakan salah satu topik dalam matematika yang juga secara tak langsung diterapkan untuk pembelajaran fisika. Salah satu penerapan fungsi dalam fisika yaitu pada topik gerak benda. Dalam gerak benda, kecepatan gerak suatu benda bergantung pada waktu dan jarak perpindahan benda tersebut. Selain itu, dalam kecepatan konstan, perpindahan suatu benda ditentukan berdasarkan waktu tertentu. Begitupun dalam menggambarkan grafik perpindahan suatu benda terhadap suatu waktu tertentu yang menerapkan langkah-langkah menggambar grafik fungsi. Selain itu, pada topik gerak jatuh bebas, kita tahu bahwa kecepatan jatuh benda dipengaruhi oleh waktu benda jatuh. Sedangkan waktu jatuh benda, dipengaruhi oleh jarak atau ketinggian awal benda terajut. Dalam hal ini, untuk

menentukan kecepatan jatuh benda, terlebih dahulu kita harus menghitung waktu jatuh benda. Namun, dengan menggunakan konsep fungsi komposisi, kita dapat menurunkan rumus kecepatan gerak jatuh bebas suatu benda yang diketahui ketinggiannya.

Sebelumnya, dalam gerak jatuh bebas, diketahui rumus-rumus berikut:



$$v = g \cdot t \quad \text{dan} \quad t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Keterangan:

v = kecepatan gerak benda (m/s)

g = percepatan gravitasi bumi (m/s^2)

t = waktu (s)

x = ketinggian benda (m)

Selain menggunakan menggunakan rumus $v = g \cdot t$, untuk menentukan v apabila t tidak diketahui dan x diketahui, maka kita dapat mengkomposisikan kedua rumus tersebut, sehingga tidak perlu menentukan t terlebih dahulu. Dalam hal ini, kita dapat menggunakan konsep fungsi komposisi, yaitu Misal: $v = f(t) = g \cdot t$

$$t = g(x) = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \text{ jika } x = h, \text{ maka } g(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Selanjutnya kita tentukan $(f \circ g)(h) = f(g(h))$

$$= g \cdot g(h)$$

$$= g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= \sqrt{g^2} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2g^2h}{g}}$$

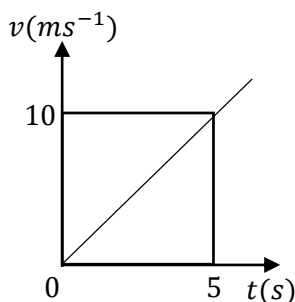
$$= \sqrt{2gh}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh $(f \circ g)(h) = \sqrt{2gh}$, yang mana fungsi komposisi tersebut dapat kita gunakan untuk menentukan gerak jatuh bebas suatu benda yang hanya diketahui ketinggian bendanya, sehingga kita tidak perlu menentukan waktu jatuh benda tersebut. Dalam hal ini, dapat disimpulkan rumus lain dalam menentukan kecepatan gerak jatuh bebas suatu benda dari ketinggian tertentu, yaitu;

$$v = \sqrt{2gh}$$

Contoh:

Berikut ini adalah grafik yang menunjukkan kecepatan (v) benda yang bergerak lurus terhadap waktu (t). Tentukan jarak yang ditempuh benda dalam waktu 5 s.



Berdasarkan grafik tersebut, dengan menggunakan konsep menentukan titik pada grafik kita dapatkan dua titik, yaitu (0, 0) dan (5, 10) yang berarti pada detik ke-0, kecepatan gerak benda juga 0 dan pada detik ke-5, kecepatan gerak benda adalah 10 ms^{-1} . Selanjutnya dapat ditentukan jarak tempuh benda, yaitu:

$$s = v \cdot t = (10 - 0)(5 - 0) = (10)(5) = 50 \text{ m}.$$

Selain pada topic gerak benda, konsep fungsi juga dapat diterapkan pada masalah yang terkait dengan pertumbuhan dan peluruhan. Misalnya, kecepatan pertumbuhan suatu bakteri pada keadaan tertentu yang

berbanding lurus dengan banyak bakteri pada saat itu atau kecepatan reaksi zat-zat kimia yang sebanding dengan banyak zat pada saat itu. Masalah pertumbuhan dan peluruhan ini dapat diselesaikan menggunakan fungsi eksponensial.

Contoh:

Massa y gram suatu radioaktif yang mengalami penyusutan dalam t tahun ditentukan oleh rumus $y = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$. Tentukan:

- Massa y mula-mula, apabila $t = 0$.
- Massa y setelah 80 tahun.

Jawaban:

- Massa y saat $t = 0$, yaitu

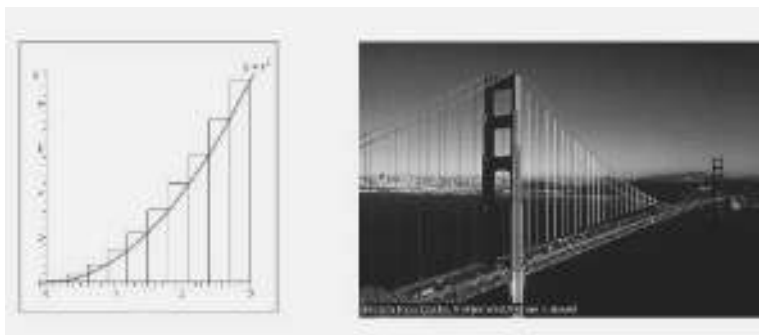
$$y = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 10(1) = 10 \text{ gram}$$

- Massa y saat $t = 80$, yaitu

$$y = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{80}{25}} = 10(0,5)^{3,2} = 1,088 \text{ gram}$$

Salah satu penerapan fungsi dalam teknik sipil adalah penentuan tegangan tali yang membentuk suatu fungsi dalam pembangunan jembatan kabel. Fungsi dari

tegangan tali ini perlu ditentukan sehingga beban dapat terbagi merata untuk setiap kabel.



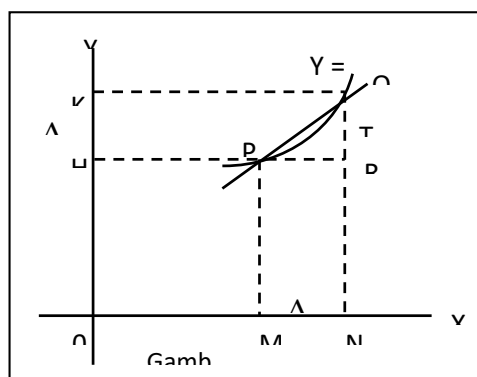
Selain itu masih banyak aplikasi fungsi yang dimanfaatkan di bidang teknologi dan teknik dimana konsep fungsi tidak berdiri secara mandiri tetapi terintegrasi dengan konsep-konsep lainnya seperti turunan dan integral. Dalam menentukan kondisi optimum dari suatu proses produksi atau pengkonstruksian suatu bangunan, diperlukan suatu perhitungan yang dinyatakan ke dalam bentuk fungsi. Selain itu, fungsi-fungsi permintaan dan penawaran salah satunya juga merupakan salah satu aplikasi yang ada di bidang ekonomi dimana saat ini telah terintegrasi ke dalam software-software di bidang teknologi ekonomi yang dapat dimanfaatkan secara langsung dalam menentukan mikro dan makro ekonomi.

Diferensial dan Aplikasinya

Diferensial adalah salah satu cabang kalkulus dalam matematika yang mempelajari bagaimana nilai suatu fungsi berubah menurut perubahan input nilainya.

Kita telah menggunakan notasi $\frac{dy}{dx}$ untuk menyatakan derivative suatu fungsi, yaitu $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Dalam hal ini $\frac{dy}{dx}$, hanya merupakan lambang belaka, dan bukan merupakan suatu hasil bagi. Sekarang akan kita bicarakan notasi $\frac{dy}{dx}$ dalam arti lain, yaitu sebagai hasil bagi dua diferensial. Untuk maksud itu, perhatikan kurva $y = f(x)$ seperti tampak pada gambar 1. Pada kurva itu ditentukan dua

titik P (x,y) dan Q(x + Δx , y +Δy) yang berdekatan letaknya. Jika M dan N berturut-turut proyeksi P dan Q pada sumbu x, dan ditarik garis PR sejajar sumbu X, maka $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{HK}{MN} = \frac{RQ}{PR} =$ gradien garis PQ, dan $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ gradien garis singgung di titik P(x,y) pada kurva.



Gradien garis singgung di titik P memotong RQ di titik T. Maka $f'(x) = \frac{RT}{PR} = \frac{RT}{\Delta x}$, yang disebut diferensial y (yang sesuai dengan perubahan pada x) ditulis dengan lambang dy. Jadi $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Untuk memperoleh arti diferensial x yang bersesuaian dengan dy, kita perhatikan fungsi identitas $y = f(x) = x$. Maka $dy = f'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Karena $y = f(x) = x$, maka kita tuliskan $dy = d.f(x) = dx$, sehingga $dx = \Delta x$.

Jadi bila diketahui $y = f(x)$, maka $dy = d.f(x) = f'(x).dx$.

A. Kaidah Diferensial

1. Diferensial konstanta

Misal $y = k$, dimana k konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

Contoh : $y = 2$, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

2. Diferensial fungsi pangkat

Misal $y = x^n$, $n =$ konstanta dan x variable, maka $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Contoh : $y = x^7$, maka $\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1}$ sama dengan $7x^6$

3. Diferensial perkalian konstanta dengan fungsi

Misal $y = kx^n$, dimana k dan n adalah konstanta dan x adalah variable, maka $\frac{dy}{dx} = knx^{n-1}$

Contoh : $y = 13x^4$ maka $\frac{dy}{dx} = 13 \cdot 4x^{4-1}$ sama dengan $52x^3$

4. Diferensial fungsi berpangkat

Misalkan $y = U^n$, dimana $U = g(x)$ dan n konstanta maka

$$\frac{dy}{dx} = n U^{n-1} \frac{dU}{dx}$$

Contoh : $y = (x^2-3x)^7$, maka $\frac{dy}{dx} = 7 (x^2-3x)^6 \cdot (2x-3)$

5. Differensial fungsi rantai

Misalkan $y = U+V$, dimana $U = g(x)$ dan $V = h(x)$ maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx} \text{ atau } \frac{dy}{dx} = U' + V'$$

Contoh : $y = 12x^5 - 9x^3$, maka $\frac{dy}{dx} = (12 \cdot 5 \cdot x^{5-1}) - (9 \cdot 3 \cdot x^{3-1}) = 60x^4 - 27x^2$

6. Differensial perkalian fungsi

Missal $y = U \cdot V$ dimana $U = g(x)$ dan $V = h(x)$ maka $\frac{dy}{dx} =$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) \cdot V + U \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right)$$

Contoh : $y = 3x^2(x-2)^5$ dengan $U = 3x^2$ maka $\frac{dU}{dx} = 6x$ dan $V = (x-2)^5$

$$\text{maka } \frac{dV}{dx} = 5(x-2)^{5-1} \cdot 1 = 5(x-2)^4$$

$$\text{sehingga } \frac{dy}{dx} = 6x(x-2)^5 + 3x^2(5(x-2)^4) = 6x(x-2)^5 + 15x^2(x-2)^4$$

7. Diferensial fungsi eksponen

Misal $y = \frac{U}{V}$ dimana $U = g(x)$ $V = h(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = \frac{(dU/x)V - U(dV/x)}{V^2}$

$$/ V^2$$

Contoh : $y = \frac{5x^2 - 4x}{2 - x}$ maka $\frac{dy}{dx} = \frac{(10x - 4)(2 - x) - (5x^2 - 4x)(-1)}{(2 - x)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5x^2 + 20x - 8}{4 - 2x + x^2}$$

8. Diferensial fungsi eksponensial

- i. Misalkan $y = e^x$, maka $\frac{dy}{dx} = e^x$
- ii. Misalkan $y = a^x$, maka $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

9. Diferensial fungsi komposit – eksponensial

- i. Misalkan $y = e^u$, dimana $U = f(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \left(\frac{dU}{dx} \right)$

Contoh : $y = e^{2x}$, dimana $U = 2x$, dimana $\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

- ii. Misalkan $y = a^u$, dimana $U = f(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{dU}{dx}$

Contoh : $y = 8^{2x}$, dimana $U = 2x$, maka $\frac{dy}{dx} = 8^{2x} \ln 8 \cdot 2$

B. Contoh Soal Diferensial :

1. Jika $f(x) = 3x^2 + 4$ maka nilai $f'(x)$ adalah...

Penyelesaian: $f(x) = 3x^2 + 4$

$$f'(x) = 6x$$

2. Turunan ke-1 dari $f(x) = (3x-2)(4x+1)$ adalah...

Penyelesaian: $f(x) = (3x-2)(4x+1)$

$$f(x) = 12x^2 + 3x - 8x - 2$$

$$f(x) = 12x^2 - 5x - 2$$

$$f'(x) = 24x - 5$$

3. Nilai $f'(x)$ dari $f(x) = \frac{2}{3}x^6 + 2x^{-1}$ adalah...

Penyelesaian: $f(x) = \frac{2}{3}x^6 + 2x^{-1}$

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{2}{3}x^{6-1} + 2(-1)x^{-1-1}$$

$$f'(x) = 4x^5 - 2x^{-2}$$

C. Aplikasi Diferensial Pada Sains

- Panjang suatu batang logam tertentu. L (dalam meter), pada suatu suhu $t^\circ\text{C}$ adalah sebagai berikut: $L = 1 + 0,00003t + 0,0000004t^2$. Tentukanlah laju perubahan panjang dalam $\text{mm}/^\circ\text{C}$, saat suhu adalah (a) 100°C dan (b) 250°C .

Penyelesaian:

Laju perubahan panjang berarti dL/dt

Karena panjang $L = 1 + 0,00003t + 0,0000004t^2$, maka

$$\frac{dL}{dt} = 0,00003 + 0,0000008t$$

$$\begin{aligned} \text{a) Saat } t = 100^\circ\text{C}, \frac{dL}{dt} &= 0,00003 + (0,0000008)(100) \\ &= 0,00011 \text{ m}/^\circ\text{C} \\ &= 0,11 \text{ mm}/^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Saat } t = 250^{\circ}\text{C}, \frac{dL}{dt} &= 0,00003 + (0,0000008)(250) \\
 &= 0,00023 \text{ m}/^{\circ}\text{C} \\
 &= 0,23 \text{ mm}/^{\circ}\text{C}
 \end{aligned}$$

2. Intensitas cahaya I (dalam satuan candela) dari sebuah lampu pada tegangan yang bervariasi, V adalah sebagai berikut: $I = 5 \times 10^{-4} V^2$. Tentukanlah tegangan pada saat cahaya meningkat dengan laju 0,4 candela per volt.

Penyelesaian:

Laju perubahan cahaya terhadap tegangan dinyatakan

oleh $\frac{dL}{dt}$

Karena $I = 5 \times 10^{-4} V^2$,

$$\frac{dL}{dt} = I = (5 \times 10^{-4})(2V) = 10 \times 10^{-4} V = 10^{-3} V$$

ketika cahaya meningkat sebesar 0,4 candela per volt,

maka $+0,4 = 10^{-3} V$, sehingga tegangan $V = \frac{0,4}{10^{-3}} = 0,4 \times 10^3 = 400$ volt.

D. Turunan Tingkat Tinggi

Diberikan sebuah fungsi f , kita turunkan f' , yang juga merupakan fungsi. Dari f' dapat kita turunkan $f'' = (f')'$, yang

disebut turunan kedua f'' , dan dari f'' kita dapat memperoleh turunan ketiga f''' , yakni $f''' = (f'')'$, dst.

Turunan ke- n dari $y = f(x)$ dilambangkan dengan

$$f^{(n)} \text{ atau } \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Contoh: Jika $y = \sin 2x$,

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin 2x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -8 \cos 2x, \text{ dst.}$$

Kita telah menggunakan notasi $\frac{dy}{dx}$ untuk menyatakan derivatis suatu fungsi, yaitu

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)^n$$

Contoh soal dan pembahasan diferensial

5. Tentukan dy , jika $y = 1/2x^2 + 2\sqrt{x} - 3/x^2 + \ln(2x+1) - 4$

Jawab :

$$\begin{aligned} dy &= d(1/2x^2) + d(2\sqrt{x}) - d(3x^{-2}) + d \ln(2x+1) - d(4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x \, dx + 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - 3(-2x^{-3}) \, dx + \frac{d(2x+1)}{2x+1} - 0 \\ &= \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3} + \frac{2}{2x+1} \right) dx \end{aligned}$$

6. Tentukan dy , jika (a) $y = \ln^2(1-X^3)$; (b) $y = \ln_2(1-X^3)$

$$\text{Jawab : (a) } dy = 2 \ln(1-X^3) d \ln(1-X^3) = -6x^2 \ln(1-X^3) / 1-X^3$$

$$\begin{aligned}
 (b) \, dy &= d \ln (1-X^3) / \ln (1-X^3) = 1/\ln (1-X^3) \cdot d (1-X^3)/1-X^3 \\
 &= -3x^2 dx / \ln (1-X^3) \cdot (1-X^3) \\
 \frac{dy}{dx} &= -3x^2 / \ln (1-X^3) \cdot (1-X^3)
 \end{aligned}$$

7. Tentukan dy, jika $y = {}^2 \log (2x^2 + x)$

Jawab :

$$\begin{aligned}
 {}^2 \log (2x^2 + x) &= {}^2 \log (2x^2 + x) / {}^2 \log 2 = \ln (2x^2 + x) / \ln 2 \\
 dy &= 1 / \ln 2 \cdot d (2x^2 + x) / 2x^2 + x = (4x + 1) dx / (2x^2 + x) \cdot \ln 2
 \end{aligned}$$

8. Tentukan dy, jika $y = \frac{2x+3}{2x-3}$

Jawab : misalkan $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = 2x - 3$ maka :

$$\begin{aligned}
 d \frac{f(x)}{g(x)} &= d \frac{2x+3}{2x-3} = \frac{(2x-3) \cdot d(2x+3) - (2x+3) \cdot d(2x-3)}{(2x-3)^2} = \frac{4x-6-4x-6}{(2x-3)^2} dx \\
 &= -12 dx / (2x-3)^2
 \end{aligned}$$

5. Diketahui $y = \ln^2 4x / x$. tentukan akar- akar persamaan $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\text{Jawab : } dy = x \cdot d \ln^2 4x - \ln^2 4x \cdot dx = 2 \ln 4x - \ln^2 4x / x^2 dx$$

$$\text{Jadi, } \frac{dy}{dx} = 2 \ln 4x - \ln^2 4x / x^2 = 0$$

$$2 \ln 4x - \ln^2 4x = 0$$

$$\ln 4x (2 - \ln 4x) = 0$$

$$\ln 4x = 0 \text{ atau } \ln 4x = 2 = \ln e^2$$

$$4x = 1 \text{ atau } 4x = e^2$$

$$X = \frac{1}{4} \text{ atau } X = \frac{1}{4} e^2$$

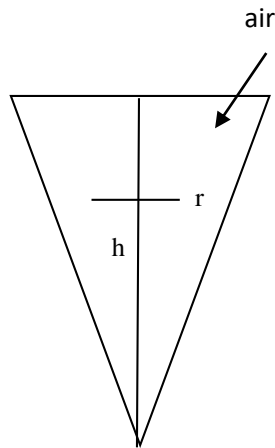
6. Tentukan dy, jika $y = \sec^2 (4x + 3)$

$$\text{Jawab : } y = \sec^2 (4x + 3) = (\cos (4x + 3))^{-2}$$

$$\begin{aligned}
 dy &= -2 (\cos (4x + 3))^{-3} d \cos (4x + 3) \\
 &= -2 \cdot -\sin (4x + 3) + d (4x + 3) / \cos^3 (4x + 3) \\
 &= 8 \sin (4x + 3) / \cos^3 (4x + 3)
 \end{aligned}$$

E. Penerapan Diferensial dalam Sains

Salah satu penerapan diferensial dalam pembelajaran sains adalah pada topic laju yang berkaitan. Laju yang berkaitan dalam hal ini dapat dicontohkan pada topic kecepatan gerak benda atau debit air. Dalam fisika, diketahui rumus-rumus kecepatan gerak suatu benda,



jarak atau perpindahan gerak benda, waktu gerak benda, debit, volume, dan atau waktunya. Pada dasarnya, rumus-rumus tersebut dapat diturunkan menggunakan konsep diferensial.

Jika x dan y merupakan dua peubah yang berkaitan dan masing-masing berubah terhadap waktu (t), maka dx/dt dan dy/dt merupakan laju yang berkaitan.

Contoh :

1. Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju $8 \text{ dm}^3/\text{menit}$. Jika tinggi tangki tersebut adalah 24 dm dan jari-jari permukaan atasnya 12 dm , seberapa Cepatkah permukaan air naik pada saat tingginya 4 dm ?

Jawab:

Misalkan V menyatakan volume, r jari-jari permukaan, dan h tinggi air. Maka

$$V = \left(\frac{\pi}{3}\right) r^2 h$$

Di sini $r = \frac{h}{2}$, sehingga

$$V = \left(\frac{\pi}{12}\right) h^3$$

Turunkan kedua ruas terhadap t , kita peroleh

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\pi}{4}\right) h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Diketahui : $\frac{dV}{dt} = 8 \text{ dm}^3/\text{menit}$. Jadi, pada saat $h = 4 \text{ dm}$, kita

mempunyai $8 = 4\pi \cdot \frac{dh}{dt}$

Sehingga $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \text{ dm/menit}$.

2. Suatu tangki silinder berjari-jari $2,5 \text{ m}$ dan tingginya 3 m ., mempunyai lubang pada alasnya dngan jari jari 25 mm .

Diketahui bahwa air akan mengalir keluar melalui lubang semacam ini dengan kecepatan $v = 2,5 \sqrt{h}$ m/s, h adalah dalamnya air dalam tangki. Carilah waktu yang diperlukan untuk mengosongkan tangki itu lewat lubang tersebut?

Jawab:

Volume air yang mengalir keluar perdetik dapat dipikirkan sebagai volume silinder yang berjari jari 25 mm dan tingginya v . Dengan demikian volume yang mengalir keluar pada saat dt detik adalah

$$\pi(0,025)^2(2,5\sqrt{h})dt$$

Perubahan permukaan air di tangki ditanyakan dengan dh , volume air yang mengalir ke luar dinyatakan oleh $(2,5)^2\pi dh$, maka,

$$\pi(0,025)^2(2,5\sqrt{h})dt = -\pi(2,5)^2 dh$$

$$\text{atau } dt = -\left(\frac{2,5}{0,025}\right)^2 \frac{dh}{2,5\sqrt{h}} = -4000 \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

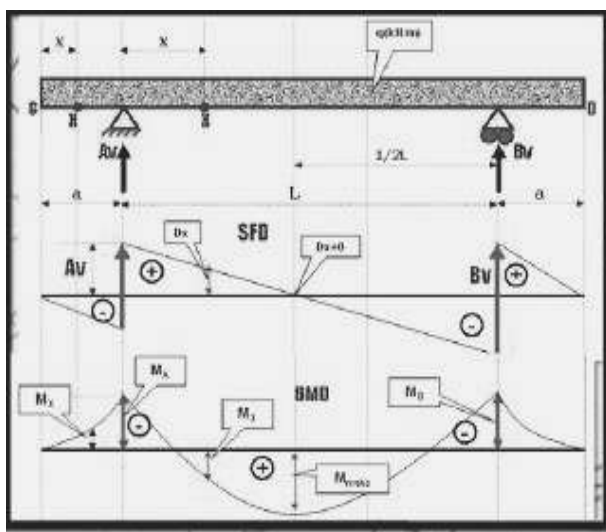
Integrasikan antara $t=0, h=3$ dan $t=t, h=0$,

$$\begin{aligned} \int_0^t dt &= \int_3^0 -4000 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -4000 \int_3^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} \\ &= -8000\sqrt{h}|_3^0 = 8000\sqrt{3} \text{ detik} = 3 \text{ jam } 34 \text{ detik} \end{aligned}$$

Dalam bidang teknik sipil, diferensial digunakan sebagai alat untuk menyelesaikan permasalahan dalam geometri dan

mekanika. Berikut ini contoh penggunaan diferensial dalam teknik sipil

1. Konstruksi Balok Overstek dengan beban merata



Mencari reaksi perletakan

Momen ekstrem terjadi pada $Dx = 0$, atau pada $\frac{dMx}{dx} = 0$

$$Mx = Av \cdot x - qx \cdot \frac{1}{2}q \cdot a \left(\frac{1}{2}a + x \right)$$

$$Mx = Av \cdot x - \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qa^2 - qa \cdot x$$

$$\frac{dMx}{dx} = Av - qx - qa$$

$$0 = Av - qx - qa \rightarrow qx = Av - qa$$

$$qx = \frac{1}{2}q(L+2a) - qa$$

$$= \frac{1}{2}qL + qa - qa$$

$$x = \frac{1}{2}L$$

Jadi, letak momen maksimum pada jarak $\frac{1}{2}L$ dari titik A.

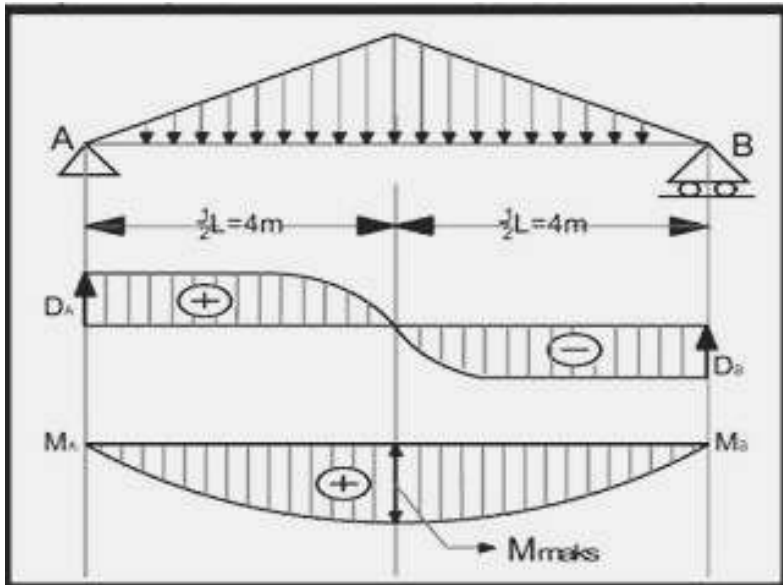
$$M_{maks} = Av \cdot x - \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qa^2 - qax$$

$$= \frac{1}{2}q(L+2a) \cdot \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}q \left(\frac{1}{2}L \right)^2 - \frac{1}{2}qa^2 - qa \cdot \frac{1}{2}L$$

$$= \frac{1}{8}qL^2 + \frac{1}{4}qLa - \frac{1}{8}qL^2 - \frac{1}{2}qa^2 - \frac{1}{4}qLa$$

$$M_{maks} = \left(\frac{1}{8}qL^2 \right) - \frac{1}{2}qa^2$$

2. Menghitung momen pada konstruksi Balok Sederhana dengan beban segitiga



Momen Ekstrem terjadi pada $dM_x/dx = 0$

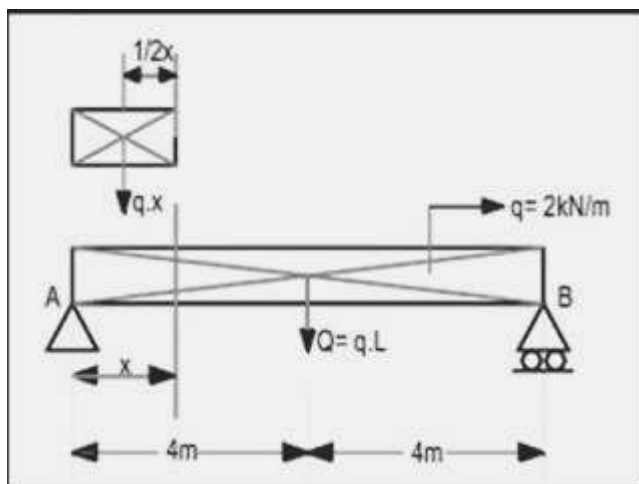
$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{4}qL - \frac{3 \cdot q \cdot x^2}{3L}$$

$$0 = \frac{1}{4} \cdot q \cdot L - \frac{3 \cdot q \cdot x^2}{3L} \rightarrow \frac{q \cdot x^2}{L} = \frac{1}{4}qL \rightarrow x^2 = \frac{1}{4}L^2 \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}L$$

3. Simple Beam dengan beban merata

$$\begin{aligned}
 Dx &= -\int qx \, dx \rightarrow Dx = -qx + C_1 \\
 x &= 0 \quad \rightarrow Dx = DA = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \\
 \text{Jadi, } C_1 &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot l; \text{ Sehingga } Dx = -qx + \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \\
 Dx &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot l - qx \rightarrow Dx = q \cdot \left(\frac{1}{2} l - x \right) \\
 Mx &= \int Dx \, dx \rightarrow Mx = \int q \cdot \left(\frac{1}{2} l - x \right) dx \rightarrow Mx = q \cdot \left[\frac{1}{2} l \cdot x - \frac{1}{2} x^2 \right] \\
 Mx &= q \cdot \left[\frac{1}{2} l \cdot x - \frac{1}{2} x^2 \right] + C_2 \quad \rightarrow Mx = 0; \text{ Maka H arga } C_2 = 0 \\
 M_{maks} &= \text{Jika } \frac{dM}{dx} = D = 0 \quad \rightarrow x = \frac{1}{2} l \\
 M_{maks} &= q \cdot \left[\frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} l \right)^2 \right] \quad \rightarrow M_{maks} = 1/8 \cdot q l^2
 \end{aligned}$$

4. Beban merata pada tumpuan sederhana



Mencari Persamaan *Shear Forces Diagram* (SFD)

Tinjauan pada titik X dg Jarak $-x-$ m dari A

$$D_x = A_v - q \cdot x$$

$$\text{Untuk } x = 0; \quad D_v = D_A = A_v - 0 = 8 \text{ kN}$$

$$\text{Untuk } x = 4; \quad D_v = D_A - A_v - q \cdot 4 = 8 - 2 \cdot 4 = 0 \text{ kN}$$

$$\text{Untuk } x = 8; \quad D_v = D_c = A_v - q \cdot 8 = 8 - 2 \cdot 8 = -8 \text{ kN}$$

Mencari Persamaan Garis Bending Momen Diagram (BMD)

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2$$

$$x = 0; \quad M_x = M_A = 0$$

$$x = 4; \quad M_x = M_c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 32 - 16 = 16 \text{ kNm}$$

$$x = 8; \quad M_x = M_B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 = 0 \text{ kNm}$$

Hubungan BMD dan SFD

$M_x = A_v \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2$ didiferensialkan :

$$\frac{dM}{dx} = A_v - q \cdot x \rightarrow \frac{dM}{dx} = D_v$$

Latihan Soal

1. Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya s memenuhi persamaan $s = 2t^2 - 12t + 8$ diukur dalam sentimeter dan t dalam detik dengan $t \geq 0$. Tentukan:
 - a. Kecepatan benda bila mana $t = 1$ dan $t = 6$
 - b. Kapan kecepatannya $= 0$
 - c. Kapan kecepatannya positif
2. Dari puncak sebuah gedung setinggi 160 dm, sebuah bola dilempar ke atas dengan kecepatan awal 64 dm / detik. Apabila $s = -16t^2 + v_0t + s_0$, maka :
 - a. Kapan ia mencapai ketinggian maksimum
 - b. Berapa ketinggian maksimumnya
 - c. Kapan ia membentur tanah
 - d. Dengan laju berapa ia membentur tanah
 - e. Berapa kecepatannya pada $t = 2$
3. Sebuah benda berosilasi secara harmonik sepanjang sumbu x , simpangannya berubah menurut persamaan:
 $x = (4,00 \text{ m}) \cos (4\pi t + \pi/4)$, t dalam sekon dan sudut dalam radian:

- a. Tentukan amplitudo, frekuensi dan periode getar
- b. Hitung kecepatan dan percepatan benda setiap saat
- c. Tentukan posisi, kecepatan dan percepatan pada $t = 1,00$ sekon
- d. Hitung kecepatan dan percepatan maksimum benda
- e. Hitung fase gerak benda pada $t = 3$ detik

Integral dan Aplikasinya

A. Pengertian Integral

Integral adalah kebalikan dari proses diferensiasi. Integral ditemukan menyusul ditemukannya masalah dalam diferensiasi di mana matematikawan harus berpikir bagaimana menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi diferensiasi.

Dalam topic fungsi turunan telah kita pelajari bahwa bila suatu fungsi f ditentukan oleh $f(x) = 2x^3$, maka turunannya adalah $f'(x) = 6x^2$. Jika turunan f' kita namakan g , jadi $f' = g$, maka hal ini sering kali ditulis sebagai $D_x f = g$ atau $D_x f(x) = g(x)$. sebaliknya fungsi f dinamakan anti turunan dari fungsi g , yang ditulis sebagai $A_x g = f$ atau $A_x g(x) = f(x)$.

“Fungsi f dinamakan suatu anti turunan dari fungsi g pada selang S , jika $A_x g = f$ atau $A_x g(x) = f(x)$ untuk setiap x dalam selang S .”

Karena turunan suatu konstanta C sama dengan nol, maka bila $D_x f(x) = g(x)$, juga $D_x \{f(x)+c\} = g(x)$. Hal ini mengakibatkan bahwa bila $A_x g(x) = f(x)$, maka juga $A_x g(x) = f(x)+c$, ka C suatu konstanta sembarang. Jadi fungsi $g(x)$ memiliki banyak anti turunan, sedangkan $f(x)$ adalah anti turunan dari $g(x)$. Leibnies menggunakan notasi integral $\int g(x) dx$ sebagai pengganti notasi $A_x g(x)$

Integral terbagi dua yaitu integral tak tentu dan integral tertentu. Bedanya adalah integral tertentu memiliki batas atas dan batas bawah. Integral tertentu biasanya dipakai untuk mencari volume benda putar dan luas.

1. Integral Tak Tentu

Dalam lambang $\int g(x) dx$, tanda $\int$ merupakan tanda integral dan $g(x)$ merupakan integran. Jika $g(x)$ adalah turunan dari $f(x)$, jadi $f'(x) = g(x)$, maka $f(x)$ adalah integral tak tentu dari $g(x)$.

Integral tak tentu mempunyai rumus umum:

$$\int F(x)dx = F(x) + c$$

Keterangan: c = konstanta

Sifat Integral TakTentu

$$\int a \, dx = ax + c$$

$$\int ax^n \, dx = \left(\frac{ax^{n+1}}{n+1} \right) + c$$

$$\int (ax + b)^n \, dx = \left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \right) + c$$

$$\int ax^n \, dx = a \int x^n \, dx, n \neq -1$$

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

Contoh:

Hitung integral tak tentu berikut

a. $\int 20x^4 + 4x + 10 - 5x^{-1} \, dx$

b. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x-1} \, dx$

$$c. \int \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} dx$$

$$d. \int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}} dx$$

$$e. \int (x^2 + 2)^2 dx$$

Jawab:

$$a. \int 20x^4 + 4x + 10 - 5x^{-1} dx = \frac{20}{5}x^5 + \frac{4}{2}x^2 + 10x - 5\ln x + c$$

$$= 4x^5 + 2x^2 + 10x - 5\ln x + c$$

$$b. \text{ Misal } u = x^2 + 2x - 1, \text{ maka } du = 2(x+1) dx$$

$$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x-1} dx = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{1}{3} u^{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+2x-1)^3} + c$$

$$c. \int \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} dx = \int (x^{-1/2} + x^{1/2}) dx$$

$$= 2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$d. \int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{3/2} + 5x^{1/2} - x^{-1/2}) dx$$

$$= \int x^{3/2} dx + 5 \int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 5 \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2} + c$$

$$= 2\sqrt{x} \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 1 \right) + c$$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } \int (x^2 + 2)^2 dx &= \int (x^4 + 4x^2 + 4) dx \\
 &= \int x^4 dx + 4 \int x^2 dx + 4 \int dx \\
 &= \frac{1}{5} x^5 + \frac{4}{3} x^3 + 4x + c
 \end{aligned}$$

2. Bagi Integral Tentu

Pengertian atau konsep integral tentu pertama kali dikenalkan oleh Newton dan Leibniz. Namun pengertian secara lebih modern dikenalkan oleh Riemann. Materi pembahasan terdahulu yakni tentang integral tak tentu dan notasi sigma akan kita digunakan untuk mendefinisikan tentang integral tentu.

Integral tentu digunakan untuk mengintegalkan suatu fungsi $f(x)$ tertentu yang memiliki batas atas dan batas bawah. Integral tentu mempunyai rumus umum:

$$\int_a^b F(x) dx = F(b) - F(a)$$

Keterangan:

- konstanta c tidak lagi dituliskan dalam integral tentu

Contoh:

Tentukan nilai dari :

$$1. \int_1^2 x^3 dx$$

$$2. \int_0^1 (2x + 3x^2) dx$$

Jawab:

$$\begin{aligned} 1. \int_1^2 x^3 dx &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} 2^4 \right) - \left(\frac{1}{4} 1^4 \right) \\ &= 4 - \frac{1}{4} \\ &= 3\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_0^1 (2x + 3x^2) dx &= \left[x^2 + x^3 \right]_0^1 \\ &= (1^2 + 1^3) - (0^2 + 0^3) \\ &= (1+1) - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

B. Pengembangan Integral

1. Integral berbentuk fungsi trigonometri

Dengan substitusi $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, fungsi trigonometri dapat di ubah menjadi fungsi aljabar, sebab:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x + \sin^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x + \sin^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Karena $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, maka $x = 2\operatorname{arctg} t$, jadi $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Sifat Integral trigonometri

- $\int \sin(ax) = -\frac{1}{a} \cos(ax) + k$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + k$
- $\int \sec(ax) \tan(ax) dx = \frac{1}{a} \sec(ax) + k$
- $\int \sec^2(ax) dx = \frac{1}{a} \tan(ax) + k$
- $\int \csc^2(ax) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax) + k$
- $\int \csc(ax) \cot(ax) dx = -\frac{1}{a} \csc(ax) + k$
- $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
- $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$
- $\int \sec^2(ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + k$
- $\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + k$
- $\int \csc(x) dx = -\ln |\csc(x) + \cot(x)| + k$
- $\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + k$

- $\int \tan(x) dx = \ln |\sec(x)| + k$
- $\int \cot(x) dx = \ln |\sin(x)| + k$
- $\int \cot(x) dx = -\ln |\csc(x)| + k$

Ingat-ingat juga beberapa sifat-sifat trigonometri, karena mungkin akan digunakan:

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A$
- $1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A} = \csc^2 A$
- $\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$
- $2 \sin A \times \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2 \cos A \times \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A \times \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2 \sin A \times \sin B = -\sin(A+B) + \cos(A-B)$

Contoh:

Hitunglah $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

Dengan substitusi $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ kita peroleh

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+3}$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{\frac{t}{\sqrt{3}} d\frac{t}{\sqrt{3}}}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2 + 1} =$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{3} \arctg(\frac{t}{\sqrt{3}}) + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctg(\frac{tg \frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}) + c$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx$$

$$= \tan x - x + c$$

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x \, d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} \, d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$\int \frac{dx}{(3x+2)^2} = \frac{1}{3} \int (3x+2)^{-2} \, d(3x+2)$$

$$= -\frac{1}{3(3x+2)} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x)}{\sin^2 4x} = -\frac{1}{4} \cot 4x + c$$

Integral substitusi

1. Integral berbentuk $\int \sqrt[p]{(ax+b)^q} \, dx$, dengan p dan q bilangan bulat.

Akar dapat dihilangkan dengan substitusi $z =$

$$\sqrt[p]{ax+b} \text{ atau } ax+b = z^p, \text{ jadi } a \, dx = p z^{p-1} \, dz$$

Contoh : hitunglah $\int x\sqrt{x-1} dx$

Jawab : dengan substitusi $z = \sqrt{x-1}$ atau $x-1 = z^2$,

kita peroleh $dx = 2z dz$. jadi

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1} dx &= \int (z^2 + 1)z \cdot 2z dz \\ &= 2 \int (z^4 + z^2) dz \\ &= 2\left(\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^3\right) \\ &= \left[\frac{2}{5}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)\right] \sqrt{x-1} + c\end{aligned}$$

2. Integral berbentuk $\int \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} q$, dengan p dan q

bilangan bulat. Akar dapat dihilangkan dengan

substitusi $z = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Contoh : hitunglah $\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx$

Jawab : dengan substitusi $z = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ atau $\frac{2-x}{2+x} = z^3$

Kita peroleh $x = \frac{2-2z^3}{1+z^3}$, jadi $2-x = \frac{4z^3}{1+z^3}$ dan $dx = \frac{-12z^2}{(1+z^3)^2}$

maka

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx &= -\int \frac{2(1+z^3)^2 \cdot z \cdot 12z^2}{16z^6(1+z^3)^2} dz \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^3} = \frac{3}{4z^2} + c\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2 + c}$$

3. Integral memuat akar-akar yang tidak senama,

misalnya $\frac{dx}{\sqrt{x(\sqrt[3]{x+1})}}$

Akar-akar menjadi senama dengan substitusi $Z = \sqrt[6]{x}$

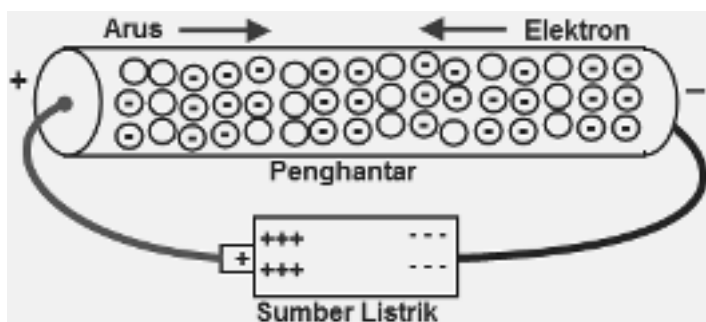
atau $x = z^6$, jadi $Vx = z^3$ maka:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(\sqrt[3]{x+1})}} &= \int \frac{6z^5 dx}{x^3(z^2+1)} = \int \frac{z^2}{z^2+1} dz \\ &= 6 \int \left(1 - \frac{1}{z^2+1}\right) dz \\ &= 6z - 6 \arctan z + C = \\ &= 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C \end{aligned}$$

C. Penerapan Integral pada Sains

Pada pembelajaran sains, integral dapat diterapkan pada beberapa topic utamanya dalam penurunan rumus untuk menentukan suatu komponen tertentu. Dalam hal ini, konsep integral yang banyak digunakan adalah integral tentu, dimana fungsi yang diintegrasikan merupakan fungsi dalam t (waktu) dan t sebagai batas-batas integrasinya. Salah satunya adalah pada topik kelistrikan dimana jumlah muatan listrik dapat ditentukan dengan menggunakan konsep

integral tentu yang mana batas-batas integrasinya merupakan rentang waktu pemindahan muatan tersebut dan fungsi yang diintegrasikan merupakan fungsi arus dalam t (waktu). Selain listrik, integral juga dapat diterapkan pada topic kecepatan gerak suatu benda dengan batas integrasinya adalah waktu gerak benda.



Gambar di atas menunjukkan adanya perpindahan muatan listrik karena adanya arus listrik. Pada umumnya, kuat arus listrik dapat ditentukan berdasarkan jumlah muatan listrik dan waktu perpindahan muatannya dengan rumus berikut.

$$Q = I \cdot t$$

Keterangan: I : kuat arus (A)

Q : muatan listrik (coulomb)

t : waktu (detik)

Selain menggunakan rumus tersebut, kita dapat menentukan jumlah muatan listrik yang dipindahkan menggunakan konsep integral tentu dengan batas integrasi yaitu rentang waktu terjadinya arus listrik.

Seperti halnya pada arus listrik, kita dapat menggunakan konsep integral tentu dalam menentukan perpindahan suatu benda yang pada umumnya dirumuskan seperti berikut.

$$S = v \cdot t$$

Perpindahan suatu benda bergantung pada kecepatan dan waktu gerak benda tersebut. Sehingga dengan mengintegalkan fungsi kecepatan gerak benda, akan didapatkan persamaan perpindahan benda. Kemudian, dengan keterangan waktu gerak yang diketahui, kita dapat menentukan jarak perpindahan benda tersebut.

Contoh:

1. Arus yang melalui suatu piranti berubah terhadap waktu sebagai $i(t)=0,05$ amper. Berapakah jumlah muatan yang dipindahkan melalui piranti ini antara $t=0$ sampai $t=5$ detik?

Jawab:

Arus I adalah laju perubahan transfer muatan q .

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ sehingga } q = \int i \, dt$$

jumlah muatan yang dipindahkan dalam 5 detik adalah

$$\begin{aligned} q &= \int_0^5 i \, dt = \int_0^5 0,05t \, dt \\ &= \int_0^5 0 \frac{0,05}{2} t^2 \\ &= \frac{0,05 (5)}{2} - \frac{0,05 (0)}{2} \\ &= \frac{1,25}{2} - 0 \\ &= 0,625 \text{ coulomb} \end{aligned}$$

2. Posisi awal mobil adalah pada koordinator $(2,0)$.

Kompenen kecepatan dinyatakan $V_x = 2t$, $V_y = 5 + 0,75t^2$.

Tentukan :

- Persamaan umum posisi mobil
- Posisi mobil saat $t=2s$

Jawab:

Diketahui $x_0 = 2$, $y_0 = 0$

- a. $r = xi + yj$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^2 2t \, dt \\ &= 2 + \int_0^2 2t \, dt \end{aligned}$$

$$= 2 + t^2$$

$$y = y_0 + \int_0^2 V_y dt$$

$$= 0 + \int_0^2 (5 + 0,75 t^2) dt$$

$$= 5t + \frac{0,75}{3} t^3$$

$$= 5t + 0,25 t^3$$

$$\text{b. } r = (2 + t^2)i + (5t + 0,25 t^3)j$$

$$= (2 + 2^2)i + [5(2) + 0,25(2^3)]j$$

$$|r| = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ m}$$

3. Sebuah benda jatuh dalam ruang hampa udara. Benda tersebut jatuh sejauh $16t^2$ m dalam t detik. Hitung kecepatan pada detik pertama!

Jawab:

V pada $t = 1$ sekon $f(t) = 16t^2$ maka $f'(1) = \dots?$

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16(1+2h+h^2) - 16}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + 32h + 16h^2 - 16}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16+32h+16h^2-16}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} 32 + 16h$$

$$f'(1) = 32 \text{ m/s}^2$$

Contoh penggunaan pada bidang teknik antara lain pada teknik mesin ketika ingin mengetahui hubungan antara kecepatan sebuah motor pada waktu tertentu dan posisi motor tersebut di setiap waktunya. Untuk menemukan hubungan ini diperlukan proses integral (antidiferensial). Aplikasi integral pada teknik sipil dapat dilihat pada pembangunan gedung Petronas di Kuala Lumpur atau gedung-gedung bertingkat di Jakarta. Semakin tinggi bangunan semakin kuat angin yang menghantamnya. Hal ini mengakibatkan adanya perbedaan rancang bangun gedung bagian bawah dan bagian atas. Untuk menentukan rancangan yang tepat, dipakailah konsep integral. Misalkan seorang peneliti meramalkan bahwa pada t tahun setelah saat ini populasi penduduk di sebuah bantaran sungai akan berubah dengan laju $6t^2 + 2t + 5$ orang per tahun. Peneliti tersebut juga menemukan bahwa tingkat populasi di sungai tersebut bertambah dengan laju mendekati 0,5 satuan per

orang. Berapa banyak populasi (dalam ukuran satuan di dalam sungai itu 5 tahun mendatang jika populasi pada saat ini adalah 50 orang dan tingkat populasi pada saat ini adalah 60 satuan.

Jawab

Misalkan $P(t)$ menyatakan populasi di bantaran sungai t tahun sejak saat ini.

Laju perubahan dari populasi terhadap waktu adalah $dP/dT = 6t^2 + 2t + 5$ orang per tahun

$$P(t) = \int dt$$

$$= \int (6t^2 + 2t + 5) dt$$

$$= 2t^3 + t^2 + 5t + c$$

$$P(0) = 50 \quad \diamond C = 50$$

$$\text{Jadi, } P(t) = 2t^3 + t^2 + 5t + 50$$

Lima tahun yang akan datang jumlah populasi di bantaran sungai adalah

$$P(5) = 2(5)^3 + 5^2 + 5(5) + 50 = 350 \text{ orang}$$

Latihan Soal

1. Partikel bergerak rotasi dengan kecepatan awal 20 rad/s dan mengalami percepatan sudut $\alpha = 4t \text{ rad/s}^2$. Jari-jari lintasannya tetap 40 cm . Tentukan besarnya sudut yang ditempuh pada saat $t = 3 \text{ s}$ dan jarak tempuh gerak partikel!
2. Benda yang bergerak melingkar kecepatan sudutnya berubah sesuai persamaan $\omega = (3t^2 - 4t + 2) \text{ rad/s}$ dan t dalam s. Pada saat $t = 1 \text{ s}$, posisi sudutnya adalah 5 rad . Setelah bergerak selama $t = 2 \text{ s}$ pertama, maka Tentukan :
 - a. percepatan sudut,
 - b. posisi sudutnya!
3. Persamaan percepatan benda adalah $a = (2x + 3) \text{ m/s}^2$. Jika posisi awal kecepatan 2 m/s . Berapakan kecepatan benda saat $x = 5 \text{ m}$?

Persamaan Differensial Biasa dan Aplikasinya

A. Definisi Persamaan Differensial Biasa

Persamaan differensial adalah hubungan antara variabel bebas, variabel tak bebas dan hasil bagi differensial dari variabel tak bebas terhadap variabel bebas. Atau Persamaan diferensial dapat diartikan sebagai gabungan antara fungsi yang tidak diketahui secara eksplisit dan turunan (diferensial)-nya. Arti lain yaitu PDB adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas. Peubah bebas biasanya disimbolkan dengan x .

Contoh :

a) $\frac{dy}{dx} = e^x + \sin x$

b) $Y'' - 2y + y = \cos x$

$$c) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$d) 3 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = t \frac{d\theta}{dt}$$

$$e) 3s^2 ds + 2v dv = 0$$

Untuk menentukan variabel bebas dan variabel terikat (tak bebas) dalam suatu persamaan differensial, dapat dilakukan dengan cara melihat variabel mana yang dapat didifferensiasi dan terhadap variabel apa didifferensiasinya.

Misalnya :

- Persamaan (a), variabel bebas adalah x, dan variabel terikat adalah y
- Persamaan (b), variabel bebas adalah x, dan variabel terikat adalah y
- Persamaan (c), variabel bebas adalah x, y dan t dan variabel terikat adalah u
- Persamaan (d), variabel bebas adalah t, dan variabel terikat adalah θ
- Persamaan (e), variabel bebas adalah s dan v, dan variabel terikat adalah v atau s.

B. Orde persamaan differensial Biasa

Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan differensial biasa (PDB):

i. $\frac{dy}{dx} = x + y$

ii. $y' = x^2 + y^2$

iii. $2 \, dy/dx + x^2y - y = 0$

iv. $y'' + y' \cos x - 3y = \sin 2x$

v. $2y''' - 23y' = 1 - y''$

Peubah bebas untuk contoh (i) sampai (v) adalah x , sedangkan peubah terikatnya adalah y , yang merupakan fungsi dari x , atau ditulis sebagai $y = g(x)$. Berdasarkan turunan tertinggi yang terdapat di dalam persamaannya, PDB dapat lagi dikelompokkan menurut ordenya, yaitu:

1. PDB orde 1, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan pertama.

Contoh (i), (ii), dan (iii) di atas adalah PDB orde 1.

2. PDB orde 2, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan kedua.

Contoh (iv) adalah PDB orde dua.

3. PDB orde 3, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan ketiga

Contoh (v) di atas adalah PDB orde tiga.

4. dan seterusnya untuk PDB dengan orde yang lebih tinggi.
PDB orde 2 ke atas dinamakan juga PDB orde lanjut.

C. Penyelesaian PDB

Penyelesaian suatu PDB adalah hubungan antara variabel bebas dengan variabel terikat, yang apabila disubstitusikan kembali ke dalam PDB tersebut akan menghasilkan suatu identitas.

Contoh :

$y = \sin x + C$, adalah penyelesaian dari PDB $\frac{dy}{dx} = \cos x$, sebab jika y disubstitusikan ke PDB tersebut menghasilkan $\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$ (identitas).

Terdapat dua macam penyelesaian dari suatu PDB, yaitu solusi umum dan solusi khusus. Penyelesaian umum adalah penyelesaian PDB yang masih mengandung konstanta sembarang sedangkan penyelesaian khusus adalah

penyelesaian yang sudah tidak mengandung lagi konstanta (sudah bernilai tertentu).

Contoh :

Selesaikan $y' = e^x$ jika $y(0) = 2$

Dari persoalan syarat batas ini, kita dapatkan penyelesaian umumnya adalah:

$$Y = Ce^x$$

Dengan memasukkan syarat batas $y(0) = 2$ dalam penyelesaian umum didapatkan konstanta sembarang C , sebagai berikut:

$$2 = Ce^0 \text{ atau } C = 2$$

Sehingga penyelesaian khususnya adalah

$$y = 2e^x$$

D. Metoda-Metoda Pemecahan Pdb Orde Satu

1. Metoda pemisahan variabel

Jika PDB yang diberikan berbentuk:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Maka

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

Atau

$$f_1(x)g_1(y)dx = -f_2(x)g_2(y)dy$$

Maka dapat dilakukan pemisahan variabel :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy$$

Contoh :

Tentukan solusi PDB $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0$ dengan menggunakan metoda pemisahan variabel

Solusi :

$$\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} dx = \frac{\cos y}{\sin y} dy \text{ atau } \cot x dx = \tan y dy$$

$$\text{Sehingga, } \ln(\sin x) = \ln(\sec y) + \ln C$$

$$\sin x = C \sec y$$

2. Persamaan Linear – Penggunaan Faktor Integrasi

Tinjau persamaan $y' + 5y = 2^{2x}$. Metode sebelumnya tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan ini.

→ kalikan kedua sisi dengan e^{5x} , diperoleh

$$e^{5x} \cdot y' + y \cdot 5e^{5x} = e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{7x}$$

$$\frac{d}{dx} \{y \cdot e^{5x}\} = e^{7x} \rightarrow y \cdot e^{5x} = \int e^{7x} dx = \frac{e^{7x}}{7} + C$$

$$\therefore y = \frac{e^{7x}}{7} + C \cdot e^{-5x}$$

Persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk $y' + Py = Q$. Persamaan ini disebut persamaan linear orde pertama. Untuk menyelesaikan persamaan ini, kalikan kedua sisi dengan sebuah factor integrasi yang selalu berbentuk $e^{\int P dx}$. Hal ini akan mengubah sisi kiri menjadi turunan dari hasil kali.

Contoh :

Tentukan solusi : $\frac{dy}{dx} = y \cot x = \cos x$

Jika kita bandingkan persamaan ini dengan $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, didapat $P = \cot x$ dan $Q = \cos x$, sehingga

$$I = \int P dx = \int \cot x dx = \ln (\sin x)$$

Dengan demikian, pemecahannya adalah

$$y e^{\ln \sin x} = \int \cos x e^{\ln \sin x} dx$$

$$y \sin x = \int \cos x \sin x dx$$

$$y \sin x = \sin^2 x + C$$

$$y = \frac{1}{\sin x} (\sin^2 x + C) = \frac{1}{2} \sin x + C \operatorname{cosec} x$$

3. PDB Bernoulli

Bentuk umum dari PDB Bernoulli adalah $y' + P \cdot y = Q \cdot y^n$, dengan P dan Q sama seperti sebelumnya merupakan fungsi x (atau konstanta), dan $n \neq 0$.

Untuk menyelesaikan PD tersebut, pertama bagi kedua sisi dengan y^n , sehingga diperoleh

$$y^{-n}y' + P \cdot y^{1-n} = Q \dots\dots\dots(1)$$

Masukkan z, diperoleh

$$y^{1-n} \rightarrow \frac{dy}{dx} = (1-n) \cdot y^{1-n} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Jika persamaan (1) dikalikan dengan (1-n) menjadi

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)Py^{1-n} = (1-n)Q$$

$\frac{dz}{dx} + P_1Z = Q_1$, dimana P_1 dan Q_1 adalah fungsi dari x dan selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan sebuah faktor integrasi.

Contoh :

Tentukan solusi PDB dari

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^{\frac{2}{3}}$$

Penyelesaian :

Pertama-tama kita tentukan P,Q dan n dengan cara membandingannya dengan bentuk umum PDB Bernoulli $y' + P \cdot y = Q \cdot y^n$, maka tampak jelas bahwa:
 $n = \frac{2}{3}$, $P=1$, $Q=x$

sehingga kita dapat menentukan R,S,dan Z sebagai berikut :

$$R = (1-n)P = \left(1 - \frac{2}{3}\right)1 = \frac{1}{3}$$

$$S = (1-n)Q = \left(1 - \frac{2}{3}\right)x = \frac{x}{3}$$

$$Z = y^{1-n} = y^{1-\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$$

Dengan demikian PDB Bernoulli di atas dapat diubah menjadi

$$\frac{dZ}{dx} + \frac{1}{3}Z = \frac{x}{3} \text{ yaitu dari bentuk umum } \frac{dZ}{dx} + RZ = S$$

Yang selanjutnya dapat diselesaikan dengan PDB linear orde satu, seperti berikut :

$$\frac{dZ}{dx} + \frac{1}{3}Z = \frac{x}{3} \quad \text{maka} \quad I = \int R dx = \int \frac{1}{3} dx = \frac{x}{3}$$

Sehingga

$$Z = e^{-I} \int S e^I dx = e^{-\frac{x}{3}} \int \frac{x}{3} e^{\frac{x}{3}} dx$$

$$Z = e^{\frac{-x}{3}} \left(x e^{\frac{x}{3}} - 3 x^{\frac{x}{3}} + C \right)$$

$$Z = x - 3 + C x^{\frac{-x}{3}}$$

Sekarang kita kembalikan ke variabel y dengan hubungan $z = y^{\frac{1}{3}}$

$$\text{Jadi, } y^{\frac{1}{3}} = x - 3 + C e^{\frac{-x}{3}} \text{ atau } y = \left(x - 3 + C e^{\frac{-x}{3}} \right)^3$$

4. Persamaan Homogen Dengan Substitusi $y=vx$

$$\text{Contoh: } y' = \frac{x+3y}{2x}$$

Persamaan tersebut tidak dapat dinyatakan sisi kanan dan sisi kiri dalam bentuk “factor x ” dan “factor y ”. Dalam kasus ini kita menggunakan substitusi $y=vx$, dimana v adalah fungsi dari x .

$$\text{Bila } y = vx \text{ didefinisikan, maka } \frac{dy}{dx} = v \cdot 1 + x \frac{dv}{dx} \rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Sehingga $\frac{x+3y}{2} = \frac{x+3vx}{2} = \frac{1+3v}{2}$ sehingga persamaan menjadi

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{2} \rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{2} - v = \frac{1+3v-2v}{2} = \frac{1+v}{2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{2} \rightarrow \int \frac{2}{1+v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$2 \ln(1+v) = \ln x + C = \ln x + \ln A$$

$$(1 + v)^2 = Ax; \text{ karena } y = vx \rightarrow v = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = Ax \rightarrow (x + y)^2 = Ax^3$$

Catatan : $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$, persamaan homogen :

Substitusi $y = vx$, sehingga $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2+v^2x^2}{vx^2} = \frac{1+v^2}{v}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v} \rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v} - v = \frac{1+v^2-v^2}{v} = \frac{1}{v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \rightarrow v \cdot dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow \int v dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln x + C \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln x + C$$

$$y^2 = 2x^2(\ln x + C)$$

5. Persamaan Differensial Linier Orde Tinggi

PDB linear orde tinggi mempunyai persamaan seperti,

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = F(x)$$

dengan $y = f(x)$, $F(x)$ dan a_n adalah fungsi x atau konstanta. PDB ini dikatakan linear karena setiap suku pada ruas kiri hanya mengandung fungsi y atau turunannya berpangkat satu dan pada setiap suku tidak

terdapat perkalian dengan fungsi y . karena bentuk turunan tertinggi pada PDB linear orde tinggi ini adalah n , maka disebut PDB linear orde n . Selanjutnya kita dapat menyebut dapat menyebutkan PDB linear orde n secara lengkap jika :

- $F(x) = 0$, PDB linear orde n yang homogen
- $F(x) \neq 0$, PDB linear orde n tak homogen
- a_n adalah fungsi x , PDB linear orde n koefisien variabel.
- a_n adalah konstanta, PDB linear orde n koefisien konstan.

yaitu :

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + a_{n-2} D^{n-2} y + \dots + a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = F(x)$$

Ingat, operator differensial ini tidak mempunyai ari jika diikuti oleh sebuah fungsi. Sekarang mari kita simak beberapa bentuk PDB berikut ini :

a. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$, $p = \text{konstanta}$

PDB ini mempunyai orde turunan tertingginya adalah 2, a_n merupakan fungsi x dan $F(x) = 0$, maka PDB ini merupakan PDB linear orde dua koefisien variabel yang homogen.

b. $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t)$ dengan L, R, C konstanta dan $V(t) \neq 0$

PDB ini mempunyai orde turunan tertingginya adalah 2, a_n merupakan konstanta, dan $F(t) \neq 0$, maka PDB ini merupakan PDB linear orde dua koefisien konstan yang tak homogen. Persamaan differensial dalam bentuk diferensial ini dapat diubah dalam bentuk perkalian diferensial operator.

Contoh:

PDB berikut dituliskan dalam bentuk operator diferensial sebagai berikut:

a) $D^2y + 3Dy - 4y = 0$ atau

$$(D^2 + 3D - 4)y = 0$$

$$(D - 4)(D + 1)y = 0$$

b) Untuk PDB : $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0$

Dapat ditulis dalam bentuk perkalian operator diferensial $D = \frac{d}{dx}$ sebagai berikut :

$$(D^4 - 1)y = 0$$

$$(D^2 + 1)(D^2 - 1)y = 0$$

$$(D + i)(D - i)(D - 1)y = 0$$

Pada pembahasan selanjutnya kita lebih banyak membahas PDB linear orde dua karena persamaan ini sering digunakan dalam terapan.

6. PDB Linear Orde Dua Koefisien Konstan yang Homogen

PDB linear orde- n koefisien konstan yang homogen ditulis seperti :

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + a_{n-2} D^{n-2} y + \dots + a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = 0$$

dengan penyelesaian terdiri atas n buah konstanta sembarang dan n buah fungsi yang saling tidak bergantung. Jadi, penyelesaian umum PDB linear konstan orde n yang homogen adalah

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n$$

dan penyelesaian umum ini diberi y_h (baca y homogen),

$$y_h = y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n$$

Apabila kita anggap $y = me^{mx}$, dengan m konstanta dan turunannya

$$Dy = me^{mx}, D^2 y = m^2 e^{mx}, D^3 y = m^3 e^{mx}, \dots, D^n y = m^n e^{mx}$$

Disisipkan ke dalam PDB linear koefisien konstan tak homogen, maka PDB berubah menjadi :

$$\{ a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} y + \dots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 y \} e^{mx} = 0$$

Atau

$$\{ a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + a_{n-2} m^{n-2} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 \} e^{mx} = 0$$

Karena faktor $y = e^{mx} \neq 0$, maka faktor yang sama dengan 0 adalah

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + a_{n-2} m^{n-2} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

sekarang kita bandingkan bentuk persamaan $f(m)$ dengan PDB nya, ternyata $f(m)$ mempunyai bentuk sama dengan PDB nya hanya mengganti simbol operator diferensial, (D) dengan m . Persamaan $f(m) = 0$ menunjukkan karakteristik PDB nya disebut persamaan karakteristik dari PDB dan m disebut akar karakteristik. Karena akar karakteristik m dapat dihitung dari persamaan karakteristik $f(m)$ maka penyelesaian PDB linear orde n koefisien konstan yang homogen adalah :

$$y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

Untuk dapat memahami cara penyelesaian PDB koefisien konstan yang homogen ini, kita akan menyimak beberapa contoh berikut :

Contoh:

1. Tentukan solusi PDB : $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$

Pertama kali yang kita lakukan adalah mengubah bentuk PDB dalam bentuk perkalian operator diferensial dari y sebagai berikut :

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

$$(D - 3)(D - 2)y = 0$$

Sehingga didapat persamaan karakteristik

$$f(m) = 0$$

$$(m-3)(m-2) = 0$$

Dan akar karakteristiknya

$$m_1 = 3 \quad m_2 = 2$$

sisipkan akar karakteristik ke dalam persamaan penyelesaian PDB, yaitu :

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

2. Selesaikan PDB : $(D^3 + 2D^2 - 8D)y = 0$

Penyelesaian :

$$(D^3 + 2D^2 - 8D)y = 0$$

Dengan persamaan karakteristik adalah

$$m^3 + 2m^2 - 8m = 0$$

$$m(m + 4)(m - 2) = 0$$

dengan akar karakteristik

$$m = 0, m = -4, m = 2$$

sehingga penyelesaian umum PDB adalah

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{2x}$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{2x}$$

penyelesaian PDB orde-n koefisien konstan homogen ini mengandung fungsi eksponen yang tergantung dari akar karakteristik m . Selanjutnya kita tinjau bentuk akar karakteristik pada PDB orde 2 yang dapat dijadikan dasar untuk penyelesaian PDB orde-n.

7. PDB Linear Orde Dua Koefisien Konstan yang Homogen

Misalkan PDB linear orde 2 koefisien konstan yang homogen seperti,

$$(aD^2 + bD + c)y = 0$$

Dengan a , b , dan c konstanta.

Persamaan karakteristik yang didapat adalah

$$f(m) = am^2 + bm + c = 0$$

mempunyai akar karakteristik :

$$m_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kemungkinan akar karakteristik yang muncul adalah :

- a) Jika $b^2 - 4ac > 0$ diperoleh dua akar karakteristik real yang besarnya berbeda $m_1 \neq m_2$. Penyelesaian Umum PDB : $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$ dengan A dan B konstanta sembarang.

Contoh:

Tentukan penyelesaian umum dari PDB berikut

$$(D^2 - 2D - 3)y = 0$$

Penyelesaian :

PDB di atas mempunyai persamaan karakteristik sebagai :

$$(m^2 - 2m - 3) = 0$$

$$(m - 3)(m + 1) = 0$$

Yang menghasilkan 2 akar karakteristik yang berbeda yaitu

$$m_1 = 3 \text{ dan } m_2 = -1$$

sehingga penyelesaian yang didapat adalah

$$y = y_h = Ae^x + Be^{-x}$$

8. PDB linier orde baru koefisien konstan tak homogen

Persamaan Diferensial Biasa dua koefisien konstan yang tak homogen di tulis dalam bentuk seperti :

$$[aD^2 + bD + c] y = f(x), f(x) \neq 0$$

Mempunyai penyelesaian umum seperti :

$$y = y_h + y_{is}$$

y_h adalah penyelesaian PDB linear yang homogen, $f(x)$ dan y_{is} (y istimewa) adalah penyelesaian untuk PDB yang tak homogen (nonhomogen), $f(x) \neq 0$. y_h adalah bagian penyelesaian yang mengandung konstanta sembarang sedangkan bagian yang tidak mengandung konstanta sembarang merupakan penyelesaian y_{is}

Metoda menghitung y_{is}

a. Metoda Reduksi

Metoda reduksi orde adalah sebuah metode yang mereduksi orde n menjadi orde $(n-1)$, orde $(n-1)$ direduksi menjadi orde $(n-2)$ dan seterusnya sampai orde satu. Untuk dapat melakukan reduksi orde ini, PDB dibuat dalam bentuk operator diferensial. Jika

sebuah PDB linear orde dua koefisien konstan tak homogen ditulis dalam bentuk operator diferensial :

$$[D - a][D - b]y = f(x)$$

Akan diselesaikan dengan metode reduksi orde maka, **langkah smart** dalam penyelesaian yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Misalkan $[D - b]y = w(x)$, kemudian sisipkan kedalam PDB.

2. PDB linear orde dua menjadi PDB Linear orde satu, $[D - a]w = f(x)$

3. Hitung w dengan metode PDB orde satu, misalnya metode PDB linear,

$$w = e^{ax} \int f(x) e^{-ax} dx + Ae^{ax}$$

4. Sisipkan w kedalam persamaan di dapat lagi PDB orde satu,

$$[D - b]y = w(x)$$

5. Selesaikan PDB pada (4) dengan metode PDB orde satu misalnya metode PDB linear orde satu, $y = e^{bx} \int w(x) e^{-bx} dx + Ae^{bx}$. Ini adalah penyelesaian PDB linear koefisien konstan yang tak homogen.

Contoh :

Gunakan metode reduksi orde untuk mencari penyelesaian umum PDB berikut.

$$[D + 2][D - 2] y = 10$$

Jawab :

ingat dengan langkah smart sebelumnya.

1. $[D - b]y = w(x)$

Jadi, $[D - 2]y = w$

2. $[D - a]w = f(x)$

Jadi, $[D + 2]w = 10$

3. $w = e^{ax} \int f(x) e^{-ax} dx + Ae^{ax}$

jadi, $e^{-2x} \int 10e^{2x} dx + Ae^{-2x} = 5 + Ae^{-2x}$

4. $[D - b]y = w(x)$

Jadi,

$$[D - 2]y = w \dots\dots\dots [D - 2]y = 5 + Ae^{-2x}$$

5. $y = e^{bx} \int w(x) e^{-bx} dx + Ae^{bx}$

jadi penyelesaiannya :

$$y = e^{2x} \int [5 + Ae^{-2x}] e^{-2x} dx + Be^{2x}$$

$$y = 5 - \frac{1}{4} Ae^{-2x} + Be^{2x}$$

$$y_h = -\frac{1}{4} Ae^{-2x} + Be^{2x} \text{ dan } y_{is} = 5$$

b. Metode koefisien tak tentu

jika sebuah PDB linear orde dua koefisien konstan ditulis dalam bentuk seperti :

1. $[D - a][D - b]y = f(x)$

Maka penyelesaian yang diperoleh adalah :

- $y = y_h + y_{is}$

untuk $f(x) = 0$ maka persamaan (1) menjadi :

➤ $[D - a][D - b]y = 0$

Dengan 2 akar karakteristik yaitu $m_1 = a$, $m_2 = b$, sehingga di dapat penyelesaian khusus sebagai berikut :

➤ $y_h = Ae^{ax} + Be^{bx}$

pokok metode koefisien tak tentu adalah menentukan bentuk umum y_h dari akar karakteristik yang muncul pada $f(x)$ dengan satu atau lebih konstanta sembarang. Yang harus diperhatikan adalah dalam menentukan akar karakteristik dalam sebuah PDB maka semua aturan akar karakteristik berlaku. Misalnya $f(x) = e^{cx}$ mempunyai akar karakteristik $m = c$. Karena akar karakteristik m

= c tidak sama dengan akar karakteristik pada y_h maka kita dapat menuliskan bentuk umumnya y_h adalah $y_{is} = Ce^{cx}$. sekarang yang harus kita lakukan adalah menentukan konstanta sembarang c. Karena y_h merupakan penyelesaian dari PDB untuk $f(x) \neq 0$, maka kita dapat mengganti y dengan y_h sehingga persamaan (1) seperti berikut :

$$[D - a][D - b]y_{is} = f(x)$$

Dari persamaan diatas kita dapat menentukan harga konstanta sembarang c.

Contoh :

Selesaikan $[D^2 + 1]y = 2e^x$ dengan menggunakan metode koefisien tak tentu.

Jawab :

Dimisalkan $f(x) = 0$

$$[D^2 + 1]y = 0 \text{ jadi ,}$$

$$[D + a][D - b]y = 0 \dots\dots\dots [D + i][D - i]y = 0$$

Sehingga memiliki karakteristik $a = i$, $b = -i$,maka penyelesaian homogen y_h adalah : $y_h = A \cos x + B \sin x$

Dari persamaan $[D^2 + 1]y = 2e^x$ berarti $f(x) = 2e^x$
 . karena $c = 1$ ($f(x) = e^{cx} \rightarrow f(x) = e^x$)

Maka penyelesaian y_{is} adalah

$$y_{is} = Ce^x$$

untuk menentukan harga konstanta c , y dalam
 PDB diatas diganti dengan y_{is} sehingga :

$$[D^2 + 1]y_{is} = 2e^x$$

Atau dapat dimisalkan

$$y''_{is} + y_{is} = 2e^x \dots\dots\dots(1)$$

karena $y_{is} = Ce^x$ maka $y'_{is} = Ce^x$, $y''_{is} = Ce^x$ dan
 kemudian substitusi nilai ini pada persamaan
 (1), sehingga :

$$y''_{is} + y_{is} = 2e^x$$

$$Ce^x + Ce^x = 2e^x$$

Karena nilai C telah dijelaskan diatas yaitu $c = 1$
 sehingga $y_{is} = Ce^x$

$$y_{is} = e^x$$

dan penyelesaian umum dari PDB adalah :

$$y = y_h + y_{is}$$

$$y = A \cos x + B \sin x + e^x$$

E. Penerapan PDB dalam Sains, Teknologi dan Engineering

PDB merupakan salah satu topic dalam matematika yang dapat diterapkan pada pembelajaran sains, misalnya pada rangkaian listrik. Berikut adalah contoh penerapan PDB dalam sains.

1. Rangkaian listrik pada gambar di samping mempunyai daya gerak listrik sebesar $E = 100 \sin 60t$ volt, resistor sebesar 2 ohm, inductor sebesar 0,1 henry, dan kapasitor sebesar $1/260$ farad. Jika pada saat $t=0$ arus listrik dan muatannya nol, tentukan muatan listrik pada kapasitornya untuk setiap saat t .

Jawaban:

- Secara umum, uraian di atas dapat ditulis dengan $LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t)$. Apabila nilai E , R , dan C disubstitusikan, maka kita dapatkan $0,1Q'' + 2Q' + 260Q = 100 \sin 60t, Q(0) = 0, I(0) = Q'(0) = 0$

Untuk memperoleh $Q = Q(t)$, maka kita harus menyelesaikan PDB berikut.

$$\begin{aligned}
 &Q'' + 20Q' + 2600Q \\
 &= 1000 \sin 60t, Q(0) \\
 &= 0, I(0) \\
 &= Q'(0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- Persamaan karakteristik dari PDB tersebut adalah $r^2 + 20r + 2600 = 0$ dengan akar karakteristik

$$r_{12} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 10400}}{2} = -10 \pm 50i, \text{ sehingga}$$

$$r_1 = -10 + 50i \text{ dan } r_2 = -10 - 50i$$

Dengan solusi homogeny, yaitu $Q_h = e^{-10t}(C_1 \cos 50t + C_2 \sin 50t)$

- Menentukan solusi khusus dengan metode koefisien tak tentu. Misalkan

$$Q_k = A \cos 60t + B \sin 60t$$

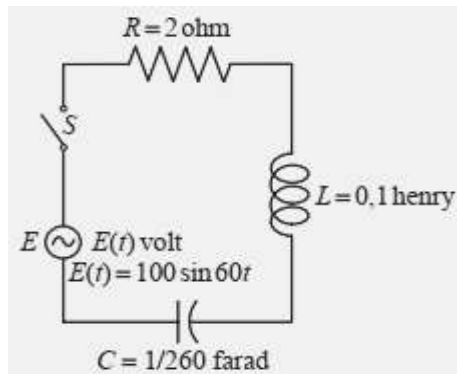
Turunan pertama dan kedua dari solusi khusus ini adalah

$$\begin{aligned}
 Q'_k &= -60(A \sin 60t - B \cos 60t) \text{ dan} \\
 Q''_k &= -3600(A \cos 60t + B \sin 60t)
 \end{aligned}$$

Substitusi Q_k, Q'_k, Q''_k ke $Q'' + 20Q' + 2600Q = 1000 \sin 60t$ untuk mencari A dan B, diperoleh $A = -\frac{30}{61}$ dan $B = -\frac{25}{61}$. Sehingga $Q_k = -\frac{30}{61} \cos 60t - \frac{25}{61} \sin 60t$.

- Sehingga didapat solusi Q sebagai fungsi dari t adalah

$$Q(t) = e^{-10t} \left(\frac{30}{61} \cos 50t + 6 \sin 50t \right) - \frac{30}{61} \cos 60t - \frac{25}{61} \sin 60t$$



$$Q(t) = \frac{6}{61} e^{-10t} (5 \cos 5t + 6 \sin 50t) - \frac{5}{61} (6 \cos 60t + 5 \sin 60t)$$

- Fungsi di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$Q(t) = \frac{6\sqrt{61}}{61} e^{-10t} \cos(50t - \phi) - \frac{5\sqrt{61}}{61} \cos(60t - \phi),$$

Dengan $\cos \emptyset = \frac{5\sqrt{61}}{61}$, $\sin \emptyset = \frac{6\sqrt{61}}{61}$, $\cos \theta = \frac{6\sqrt{61}}{61}$, dan $\sin \theta = \frac{5\sqrt{61}}{61}$, sehingga $\emptyset = 0,88$ dan $\theta = 0,69$.

∴ Muatan listrik Q pada kapasitor pada setiap saat t adalah

$$Q(t) = 0,77e^{-10t} \cos(50t - 0,88) - 0,64 \cos(60t - 0,69).$$

F. Penerapan PDB dalam Teknik Sipil

Konsep persamaan diferensial dapat digunakan di teknik sipil ketika menguji kepadatan lapangan pada pekerjaan perkerasan jalan dengan menggunakan data-data hasil pengujian berupa kadar air dan berta isi kering. Jika data kadar air dan berat isi kering diketahui, maka persamaan kepadatan dari pekerjaan perkerasan jalan dapat diketahui. Selanjutnya kadar air optimum dan kepadatan maksimum dapat ditentukan dengan menggunakan konsep persamaan diferensial.

Contoh: Hasil pengujian kepadatan lapangan pada pekerjaan perkerasan jalan diperoleh data-data hasil pengujian sebagai berikut:

Kadar Air (%)	Berat Isi Kering (gr/cc)
6	1.45
8	1.54
10	1.57
12	1.60
14	1.56
16	1.50

1. Tentukan persamaan kepadatan dari pekerjaan perkerasan jalan terserbut
2. Tentukan kadar air optimum dan kepadatan maksimum dengan menggunakan konsep persamaan diferensial

Jawab

1. Diperoleh persamaan kepadatan

$$y = -0.0046x^2 + 0.1060x + 0.9805$$

atau

$$\gamma_{kering} = -0.0046W^2 + 0.1060W + 0.9805$$

2. Dengan menggunakan teorema Maxima/Minima diperoleh

Kadar air optimum ($W_{optimum}$) = 11.52%

Kepadatan maksimum ($\gamma_{kering_maximum}$) = 1.591 gr/cc

Daftar Pustaka

- Adistiana, K. D. (2018, Februari 20). *Fisika Kelas 12 | Penjelasan Hukum I dan II Kirchoff*. Retrieved from Ruang Guru: <https://blog.ruangguru.com>
- Astutik, S. (2012). *Fisika Matematika (Buku 1)*. Jember: Jember University Press.
- Hermawan, S. (2012). *Mini Book Master Fisika SMA*. Jakarta: Wahyumedia.
- Jones, K. (2020, January 6). *How the STEM Crisis is Threatening the Future of Work*. Retrieved from Visual Capitalist: <https://www.visualcapitalist.com/>
- Milaturrahmah, N., Mardiyana, M., & Pramudya, I. (2017). Mathematics Learning Process with Science , Technology , Engineering , Mathematics (STEM) Approach in Indonesia. In International Conference on Mathematics and Science Education (ICMScE) (pp. 1–7).